

УДК 519.3

А. Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могили

О.І. ЛИТВИНЕНКО, І.О. АСТИОНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

П.И. ГУЧЕК

Інститут біокібернетики і біомедичної інженерії ім. М. Налеча Польської академії наук, Польща

### **КВАЗИМЕТОД МОНТЕ-КАРЛО І КУБАТУРИ ДЛЯ СЕРЕНДИПОВИХ ПОЛІНОМІВ**

*У роботі розглядаються серендипові поліноми (стандартні та альтернативні) другого і третього порядків. Квазіметод Монте-Карло побудовано на базі квадратного обчислювального шаблону і стратифікованої вибірки із дев'яти аплікату. Наведено три способи конструювання кубатури за версією Ньютона-Котеса. Проведено аналіз результатів тестування кубатури з урахуванням специфічних властивостей і характеру поведінки серендипових поверхонь на границі і всередині носія. Знайдено просту залежність між середньою аплікатою поверхні і барицентричною аплікатою (у центрі квадрата). Кількість необхідних вузлів інтегрування зведено до одного. В цьому випадку кубатура Ньютона-Котеса виявляється більш ефективною, ніж кубатура Гаусса-Лежандра.*

*Ключові слова: квазіметод Монте-Карло; серендипові елементи другого і третього порядків; обчислювальний шаблон; кубатура Ньютона-Котеса; центрований елемент; стратифікована вибірка аплікату.*

А. Н. ХОМЧЕНКО

Черноморский национальный университет имени Петра Могили

Е.И. ЛИТВИНЕНКО, И.А. АСТИОНЕНКО

Херсонский национальный технический университет

П.И. ГУЧЕК

Институт биокибернетики и биомедицинской инженерии им. М. Налеча Польской академии наук, Польша

### **КВАЗИМЕТОД МОНТЕ-КАРЛО И КУБАТУРЫ ДЛЯ СЕРЕНДИПОВЫХ ПОЛИНОМОВ**

*В работе рассматриваются серендиповы полиномы (стандартные и альтернативные) второго и третьего порядков. Квазиметод Монте-Карло построен на базе квадратного вычислительного шаблона и стратифицированной выборки из девяти аппликат. Приведены три способа конструирования кубатуры по версии Ньютона-Котеса. Проведен анализ результатов тестирования кубатуры с учетом специфических свойств и характера поведения серендиповых поверхностей на границе и в середине носителя. Обнаружена простая зависимость между средней аппликатой поверхности и барицентрической аппликатой (в центре квадрата). Количество необходимых узлов интегрирования сведено к одному. В этом случае кубатура Ньютона-Котеса является более эффективной, чем кубатура Гаусса-Лежандра.*

*Ключевые слова: квазиметод Монте-Карло; серендиповы элементы второго и третьего порядков; вычислительный шаблон; кубатура Ньютона-Котеса; центрованный элемент; стратифицированная выборка аппликат.*

A. N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

O.I. LITVINENKO, I.O. ASTIONENKO

Kherson National Technical University

P.I. GUCHEK

Institute of Biocybernetics and Biomedical Engineering of the Polish Academy of Sciences, Poland

## **MONTE-CARLO QUASI-METHOD AND CUBATURES FOR SERENDIPIC POLINOMIALS**

*The overwhelming majority of calculations by Monte-Carlo method is done with the use of pseudo-random numbers (quasi-random points). Practice has shown that in some cases it is better to refuse from modelling real random process and to use artificial model instead. Computational templates and cubatures with quasi-random nodes of integration are considered in the paper. With concrete examples of biquadratic and bicubic polynomials it is shown that sequence of quasi-random points gives better results. It is a known fact and the essence of Monte-Carlo quasi-method. The Monte Carlo quasi-method is based on a square computational template and a stratified sample of 9 applications. There are 3 ways to design the cubature according to the Newton-Cotes version (the Newton-Cotes procedure, the hierarchic procedure on the basis of nodal proportionality, quick algorithm for centered templates). The analysis of the results of cubature testing is carried out taking into account the specific properties and behavior of the serendipic surfaces at the border and in the middle of the carrier. A simple relationship was found between the mean surface application and the barycentric application (in the center of the square). The number of necessary integration nodes is reduced to one. In this case, the cubature of Newton-Cotes is more effective than the cubature of Gauss-Legendre.*

*The algorithm of The Monte Carlo quasi-method for quick determination of per-node distribution of even volume force of serendipic elements of biquadratic and bicubic interpolations is built. There is reason to believe that Zienkiewicz was wrong as to the role of out-of-node parameters. It turned out that barycentric application determines “upon the average” the character of nonstandard serendipic surface.*

*Keywords: Monte Carlo quasi-method; serendipic elements of the 2<sup>nd</sup> and 3<sup>rd</sup> orders; computational template; cubature of Newton-Cotes; centered element; stratified sample.*

### **Постановка проблеми**

Переважна більшість розрахунків за методом Монте-Карло здійснюється з використанням псевдовипадкових чисел (квазівипадкових точок). Практика свідчить, що в деяких випадках краще відмовитись від моделювання реального випадкового процесу і замість цього скористатися штучною моделлю. В роботі розглядаються обчислювальні шаблони і кубатури із квазівипадковими вузлами інтегрування. На конкретних прикладах біквадратичних і бікубічних серендипових поліномів показано, що послідовність квазівипадкових точок дає кращі результати. Це відомий факт і саме в цьому суть квазіметоду Монте-Карло. На квадратному шаблоні ( $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 1$ ) сформульовано правило дев'яти аплікати для поліномів другого і третього порядків. Специфіка поведінки серендипової поверхні на границі і всередині носія дозволяє знайти просту залежність інтегральної характеристики лише від однієї аплікати в центрі носія. Це рідкісний випадок, коли кубатура Ньютона-Котеса ефективніша за кубатуру Гаусса-Лежандра.

### **Аналіз попередніх досліджень і публікацій**

Корисну інформацію про квазіметод Монте-Карло (термін Г. Секея) можна знайти в [1–3]. Серендипові елементи в методі скінченних елементів (МСЕ) відомі з 1968 р. [4].

Спочатку це були лише стандартні моделі. У 1982 р. [5, 6] вдалося сконструювати перші альтернативні моделі. Зараз альтернативних моделей – безліч, хоча мало хто знає про них. Нових цікавих задач також безліч. Одна з них – це задача про інтегральні характеристики серендипових поліномів. Правило дев'яти аплікат [7] модифіковано таким чином, щоб забезпечити швидкість і точність подвійного інтегрування серендипових поліномів другого і третього порядків.

### Мета дослідження

Сконструювати придатні для квазіметоду Монте-Карло обчислювальний шаблон і кубатуру Ньютона-Котеса, які спростовують категоричну думку про переваги версії Гаусса-Лежандра. Результати стосуються як стандартних, так і альтернативних серендипових поліномів другого і третього порядків.

### Викладення основного матеріалу дослідження

В математиці відомі послідовності [2, 3] двовимірних невинуватих точок  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , для яких має місце рівність:

$$\frac{1}{\text{mes}D} \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Q_i). \quad (1)$$

Таку послідовність називають рівномірно розподіленою в області  $D$ . Бажано, щоб рівномірність розташування точок  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  в  $D$  мала місце не тільки при  $n \rightarrow \infty$ , а починаючи з невеликого  $n$ , і щоб точки  $Q_i$  достатньо просто обчислювались. Вибіркове арифметичне середнє апроксимує математичне сподівання функції випадкового вектора не тільки тоді, коли послідовність  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  випадкова і рівномірно розподілена в  $D$ . Достатньо забезпечити лише рівномірний розподіл цієї послідовності. В конкретних задачах послідовність квазівипадкових точок часто дає кращі результати [1, 2]. Наша задача полягає у побудові кубатури для оцінки інтеграла:

$$I = \frac{1}{S} \iint_D N_i(x, y) dS, \quad (2)$$

де  $S$  – площа квадрата  $D$  ( $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ );  $N_i(x, y)$  – базисна функція серендипової інтерполяції, що асоціюється з вузлом  $i$ .

Ми розглянемо конкретні поліноми  $N_i(x, y)$  для біквадратичної інтерполяції (8 вузлів) та бікубічної інтерполяції (12 вузлів). Фактично відбувається заміна інтеграла інтегральною сумою. Цей прийом добре відомий з часів Кеплера. Точність такої заміни залежить від вагових коефіцієнтів і кількості доданків. Добре, коли замість арифметичного усереднення (проста вибірка) використовують зважене усереднення (стратифікована вибірка). Кубатури можуть суттєво залежати від властивостей поліномів  $N_i(x, y)$ . Нагадаємо про властивості:

$$N_i(x_k, y_k) = \delta_{ik}, \quad \sum_{i=1}^m N_i(x, y) = 1, \quad (3)$$

де  $m$  – кількість базисних функцій;  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера;  $i$  – номер функції,  $k$  – номер вузла інтерполяції.

До цього треба додати властивість міжелементної неперервності. Саме ця властивість "приховує" просту залежність між інтегральним середнім полінома  $N_i(x, y)$  і барицентричною аплікатою  $N_i(0;0)$  поверхні.

Перейдемо до конструювання кубатурної формули (правило дев'яти аплікат). Функцію, що інтегрується, позначимо через  $f(x, y) = N_i(x, y)$ . Щоб отримати повний спектр інтегральних характеристик, достатньо проінтегрувати лише "кутові" поліноми ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). В якості обчислювального шаблону візьмемо елемент лагранжевої біквадратичної інтерполяції (рис. 1, а).

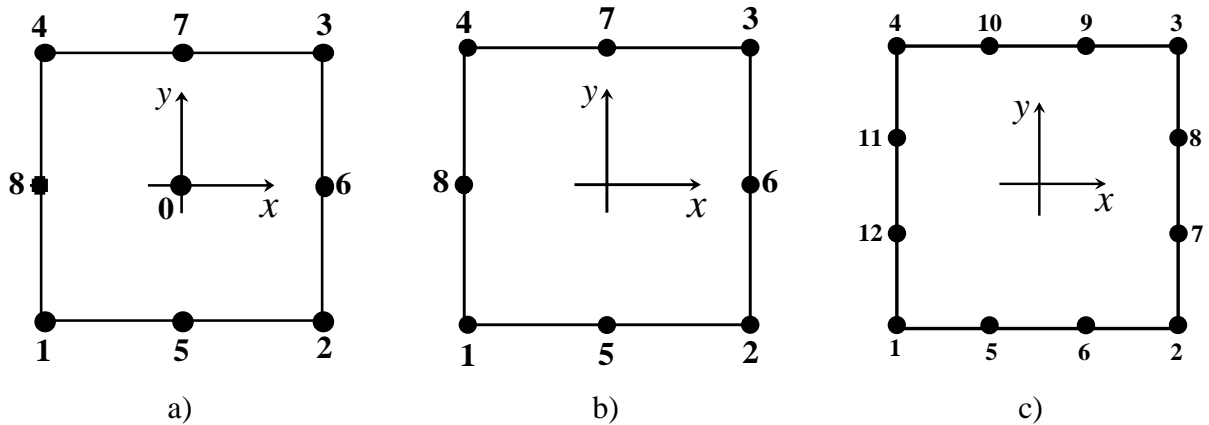


Рис. 1. а) обчислювальний шаблон; б) серендипів елемент другого порядку; в) серендипів елемент третього порядку.

Звертаємо увагу на рівномірний розподіл вузлів інтегрування на обчислювальному шаблоні (рис. 1, а). Ми покажемо три способи побудови кубатури.

### 1. Процедура Ньютона-Котеса

Щоб отримати вагові коефіцієнти стратифікованої вибірки достатньо мати три функції Лагранжа (рис. 1, а):

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y) \cdot xy;$$

$$N_5(x, y) = \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y) \cdot y;$$

$$N_0(x, y) = (1-x^2)(1-y^2).$$

Інтегральне усереднення дає:  $\gamma_i = \frac{1}{36}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $\gamma_i = \frac{1}{9}$ ,  $i = 5, 6, 7, 8$ ;  $\gamma_0 = \frac{4}{9}$ .

Таким чином, кубатура має вигляд:

$$\bar{f} = \frac{4}{9} \cdot f_0 + \frac{1}{36} \cdot \sum_{i=1}^4 f_i + \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=5}^8 f_i, \quad (4)$$

де  $\bar{f}$  – середня апліката поверхні  $N_i(x, y)$  серендипової інтерполяції (біквдратичної або бікубічної).

## 2. Ієрархічна процедура на основі повузлової пропорційності

На рис. 2 показана ієрархія обчислювальних шаблонів

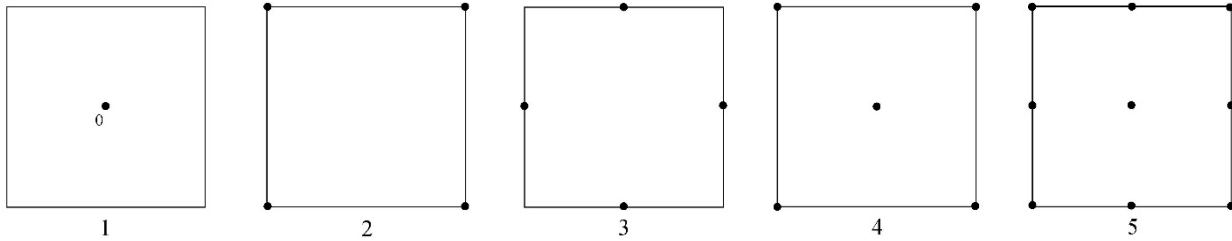


Рис. 2. Ієрархія обчислювальних шаблонів.

Коментар: модель 4 – це зважене усереднення моделей 1 і 2 з коефіцієнтами відповідно  $\frac{4}{5}$  і  $\frac{1}{5}$ ; модель 5 – це зважене усереднення моделей 3 і 4 з коефіцієнтами відповідно  $\frac{4}{9}$  і  $\frac{5}{9}$ . В результаті отримаємо кубатуру (4).

## 3. Швидкий алгоритм для центрованих шаблонів

Позначимо через  $x$  вагу кутового вузла та запишемо рівняння вагового балансу для моделі 5 (рис. 2):

$$4x + 16x + 16x = 1, \quad x = \frac{1}{36}.$$

Як бачимо, (4) – це двовимірний аналог відомого правила параболічних трапецій (Сімпсона). З точки зору математичної статистики (4) – це вибіркове середнє із дев'яти аплікат правильно стратифікованої вибірки. Слово "правильно" означає підтвердження гіпотези дифузійної "плями" у схемах випадкових блукань з поглинаючими вузлами. Це має пряме відношення до методу Монте-Карло. Для перевірки формули (4) розглянемо два стандартних серендипових полінома [4]. Кутовий поліном біквдратичної інтерполяції має вигляд:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(-1-x-y).$$

Формула (4) дає  $\bar{f} = \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{36} \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot 0 = -\frac{1}{12}$ , що співпадає з математичним сподіванням (кутовим "навантаженням") [4]. Зрозуміло, що вузлове "навантаження" на проміжний вузол дорівнює  $\frac{1}{3}$ .

Кутовий поліном бікубічної інтерполяції має вигляд:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(9(x^2 + y^2) - 10).$$

Формула (4) дає  $\bar{f} = \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{5}{16}\right) + \frac{1}{36} \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{8}$ , що співпадає з

математичним сподіванням [4]. Приклади з альтернативними базисами серендипових моделей підтверджують абсолютну точність кубатури (4). Для альтернативних моделей з різноманітним рельєфом поверхонь важливо знайти просту залежність середньої аплікати  $\bar{f}$  від барицентричної аплікати  $f_0$ . Ця залежність має вигляд:

для елемента Q8:  $\bar{f} = \frac{4}{9} \cdot f_0 + \frac{1}{36}$ ; для елемента Q12:  $\bar{f} = \frac{4}{9} \cdot f_0 + \frac{1}{72}$ .

### Висновки

Побудовано алгоритм квазіметода Монте-Карло для швидкого визначення спектру вузлових "навантажень" серендипових елементів Q8 і Q12. Є підстави вважати, що О. Зенкевич [4] помилявся щодо ролі невузлових параметрів. Виявляється, що  $f_0$  визначає "в середньому" характер нестандартної серендипової поверхні.

### Список використаної літератури

1. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике / Г. Секей. — М. : Мир, 1990. — 240 с.
2. Соболев И. М. Метод Монте-Карло / И. М. Соболев. — М. : Наука, 1985. — 80 с.
3. Соболев И. М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб / И. М. Соболев. — М.: Знание, 1985. — 32 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М. : Мир, 1975. — 541 с.
5. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А. Н. Хомченко. — Ивано-Франковский институт нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 9 с. — Депонировано в ВИНТИ. 18.03.82, № 1213.
6. Хомченко А. Н. Метод конечных элементов: стохастический подход / А. Н. Хомченко. — Ивано-Франковский институт нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 7 с. — Депонировано в ВИНТИ. 15.10.82, № 5167.
7. Хомченко А. Н. Правило параболических трапеций и кубатурные формулы / А. Н. Хомченко, Н. В. Коваль // Геометричне моделювання та інформаційні технології. Науковий журнал. — № 1(3). — Миколаїв: МНУ ім. В.О. Сухомлинського, 2017. — С. 145–148.

### References

1. Sekey, G. Paradoxes in the theory of probability and mathematical statistics. Mir. Moscow. (1990)
2. Sobol, I. M. Method Monte-Karlo. Nauka. Moscow. (1985)
3. Sobol, I. M. Points. uniformly filling multidimensional cube. Znaniye. Moscow. (1985)
4. Zenkevich, O. Method konechnykh elementov v tekhnike. Mir. Moscow. (1975)
5. Homchenko, A. N. Nekotorye veroyatnostnye aspekty MKE. Ivano-Frankovskiy institut nefiti i gaza. Ivano-Frankovsk. Deponirovano v VINITI. 18.03.82, № 1213. (1982)
6. Homchenko, A. N. Metod konechnykh elementov: stohasticheskiy podhod. Ivano-Frankovskiy institut nefiti i gaza. Ivano-Frankovsk. Deponirovano v VINITI. 15.10.82, № 5167. (1982)
7. Homchenko, A. N., Koval, N. V. Pravilo parabolicheskikh trapeციy i kubaturnye formuly. Neometrychne modeliyuvannya ta informatsiini tekhnolohii. 1(3), 145-148. (2017)