

УДК 519.6

Д.О. ПРОТЕКТОР, Д.А. ЛИСИН, О.Ю. ЛИСИНА
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО БЕССЕТОЧНОЙ СХЕМЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ОБЩИХ РЕШЕНИЙ

В статье приводится сравнительный анализ численных решений двумерных задач теплопроводности по бессеточной схеме, полученных с использованием фундаментальных и общих решений модифицированного уравнения Гельмгольца. В работе использовался бессеточный метод, основанный на комбинации метода двойного замещения с использованием радиальных базисных функций и метода частных решений. Сравнительный анализ решений краевых задач с использованием фундаментальных и общих решений продемонстрирован на примере двух тестовых задач. Были получены численные решения краевых задач с использованием фундаментального и общего решений для различного числа интерполяционных узлов. Получены среднеквадратичные ошибки решения рассмотренных задач, а также построены сравнительные графики зависимости среднеквадратичной ошибки от числа интерполяционных узлов.

Ключевые слова: численный анализ, двумерные задачи теплопроводности, фундаментальное решение, общее решение, бессеточная схема.

Д.О. ПРОТЕКТОР, Д.О. ЛІСІН, О.Ю. ЛІСІНА
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗА БЕЗСІТКОВОЮ СХЕМОЮ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ І ЗАГАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

У статті наводиться аналіз чисельних розв'язків двовимірних задач теплопровідності за безсітковою схемою, які отримані з використанням фундаментальних і загальних розв'язків модифікованого рівняння Гельмгольца. У роботі використовувався безсітковий метод, який ґрунтується на комбінації методу подвійного заміщення з використанням радіальних базисних функцій і методу частинних розв'язків. Порівняльний аналіз розв'язків крайових задач продемонстрований на прикладі двох тестових задач. Були отримані чисельні розв'язки двовимірних нестационарних задач теплопровідності з використанням фундаментального і загального розв'язків для різного числа інтерполяційних вузлів. Були визначені середньоквадратичні похибки розв'язків розглянутих задач, а також побудовані порівняльні графіки залежності середньоквадратичної похибки від числа інтерполяційних вузлів.

Ключові слова: чисельний аналіз, двовимірні задачі теплопровідності, фундаментальний розв'язок, загальний розв'язок, безсіткова схема.

D.O. PROTEKTOR, D.A. LISIN, O.YU. LISINA
V.N. Karazin Kharkiv National University

NUMERICAL ANALYSIS OF SOLUTIONS OF TWO-DIMENSIONAL HEAT CONDUCTION PROBLEMS BY MESHLESS APPROACH USING FUNDAMENTAL AND GENERAL SOLUTIONS

This article is devoted to the analysis of numerical solutions of two-dimensional heat conduction problems by meshless approach, obtained using fundamental and general solutions of the modified Helmholtz equation. The meshless method described in this article is based on a combination of the dual reciprocity method with radial basis functions and the method of particular solutions. Based on the method of particular solutions, the solution of an inhomogeneous differential equation is represented as a sum of particular and homogeneous solutions. The fundamental and general solutions are used to find the homogeneous part of the solution, and the dual reciprocity method with radial basis functions is used to obtain the particular solution. The choice of such a meshless scheme is primarily due to the fact that the method of fundamental solutions is easily programmable, has spectral convergence and allows to achieve a high order of accuracy. The fundamental solution of a differential operator is singular at the origin, which leads to the construction of a fictitious boundary outside the physical boundary of the domain of the solution of the boundary-value problem. This is done in order to circumvent the singularity of the fundamental solutions. It is important to determine the optimal location of the fictitious boundary. It may be a circle whose center coincides with the geometric center of the solution domain. With an increase in the radius of the fictitious boundary, the accuracy of the solution obtained increases, but the conditional number of the matrix of the system of linear algebraic equations deteriorates, and vice versa. The general solution of a differential operator differs from its fundamental solution in that it is non-singular everywhere. The use of the general solution makes it possible to avoid building a fictitious boundary, which in turn makes it possible to achieve a more stable solution of a boundary-value problem. Numerical analysis of the solution of boundary-value problems using fundamental and general solutions is demonstrated into two benchmark problems. Numerical solutions of boundary-value problems were obtained using fundamental and general solutions for different numbers of interpolation nodes. In the article presents table of root mean square errors of solution to benchmark problems using fundamental and general solutions for different numbers of interpolation nodes, and also shows graph of the root mean square error off the number of interpolation nodes.

Keywords: numerical analysis, two-dimensional heat conduction problems, fundamental solution, general solution, meshless approach, the dual reciprocity method, radial basis function.

Постановка проблемы

В последние годы наблюдается растущая популярность использования бессеточных подходов при решении задач математической физики. Одна из наиболее успешно зарекомендовавших себя бессеточных схем основана на комбинации метода двойного замещения с использованием радиальных базисных функций (РБФ) и метода фундаментальных решений. Согласно методу частных решений, решение неоднородного дифференциального уравнения представляется в виде суммы частного и однородного решения. Для получения частного решения в данной схеме применяется метод двойного замещения с использованием РБФ, а для получения однородного решения используется метод фундаментальных решений. Выбор такой бессеточной схемы обусловлен, прежде всего тем, что метод фундаментальных решений является легко программно реализуемым, имеет спектральную сходимость [1] и позволяет

<https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-8>

достичь высокого порядка точности. Объединение метода фундаментальных решений с методом двойного замещения и радиальными базисными функциями представляет собой полностью бессеточный метод.

Однако, несмотря на все эти достоинства, метод фундаментальных решений обладает одним существенным недостатком. Данный недостаток заключается в построении фиктивной границы за пределами физической границы области решений краевой задачи, к узлам которой "привязываются" фундаментальные решения. Это делается для того, чтобы обойти сингулярность фундаментальных решений. Важно определить оптимальное размещение фиктивной границы. Она может представлять собой окружность, центр которой совпадает с геометрическим центром области решения. С увеличением радиуса фиктивной границы повышается точность полученного решения, но ухудшается число обусловленности матрицы системы линейных алгебраических уравнений, и наоборот. Произвольное размещение фиктивной границы существенно снижает практическую применимость метода фундаментальных решений, особенно на сложных многосвязных областях.

В качестве альтернативы W. Chen [2] предложил использовать общее решение, которое является несингулярной радиальной функцией, удовлетворяющей соответствующему управляющему дифференциальному уравнению. В настоящее время, общее решение широко применяется на практике для решения задач, описываемых дифференциальным уравнением Гельмгольца. Однако, систематические численные и теоретические исследования по вопросам сходимости, стабильности и точности решения задач бессеточными методами, использующими общие решения, все ещё отсутствуют.

Анализ последних исследований и публикаций

Обзоры по бессеточным методам, основанные на использовании радиальных базисных функций и общих решений, представлены в статьях [3–10].

Цель исследования

Целью данной работы является проведение численного сравнительного анализа решений двумерных задач теплопроводности по бессеточной схеме, полученных с использованием фундаментальных и общих решений модифицированного уравнения Гельмгольца.

Изложение основного материала исследования

Метод частных решений

Рассмотрим модифицированную задачу Гельмгольца. Рассматривается дифференциальное уравнение:

$$\nabla^2 u(x) - \lambda^2 u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где λ – константа, $f(x)$ – неоднородный член,

со следующими краевыми условиями:

$$u(x) = g_1(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x) = g_2(x), \quad x \in \Gamma_2, \quad (3)$$

где n – внешний вектор нормали,

в замкнутой области $\Omega \subset R^2$, ограниченной $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Решение уравнения (1) можно представить в виде суммы однородного решения $u_h(x)$ и частного решения $u_p(x)$:

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x). \quad (4)$$

Частное решение $u_p(x)$ удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 u_p(x) - \lambda^2 u_p(x) = f(x) \quad (5)$$

и будет получено с использованием метода двойного замещения.

Однородное решение $u_h(x)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 u_h(x) - \lambda^2 u_h(x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (6)$$

и граничным условиям:

$$u_h(x) = g_1(x) - u_p(x), \quad x \in \Gamma_1; \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u_h(x) = g_2(x) - \frac{\partial}{\partial n} u_p(x), \quad x \in \Gamma_2. \quad (8)$$

Исходя из уравнений (4)–(8), можно обнаружить, что неоднородная задача сводится к однородной задаче после того, как отдельно будет получено частное решение из уравнения (5).

Для получения частного решения левый член в уравнении (5) аппроксимируется в виде:

$$f(x) \cong \sum_{i=1}^{N+L} \alpha_i \varphi(r_i), \quad (9)$$

где $r_i = |x - x_i|$ – евклидовое расстояние; функции $\varphi(r_i)$ представляют собой результат воздействия модифицированного оператора Гельмгольца на соответствующие радиальные базисные функции $\Phi(r_i)$:

$$\nabla^2 \Phi(r_i) - \lambda^2 \Phi(r_i) = \varphi(r_i), \quad (10)$$

где α_i – неизвестные, подлежащие определению; N и L обозначают количество узлов внутри и на границе области, соответственно.

Реализуя процедуру интерполяции, приходим к системе из $N + L$ линейных уравнений:

$$f(x_i) \cong \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \varphi(r_{ij}), \quad i = 1, \dots, N + L. \quad (11)$$

Система линейных уравнений (11) может быть выражена в матричной форме:

$$A_\varphi \alpha = f(x), \quad (12)$$

где

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_{N+L}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1(x_{N+L}) & \cdots & \varphi_{N+L}(x_{N+L}) \end{bmatrix}; \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N+L} \end{bmatrix}; f(x) = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N+L}) \end{bmatrix}.$$

Неизвестные коэффициенты определяются из выражения:

$$\alpha = A_\varphi^{-1} f(x). \quad (13)$$

Частное решение $u_p(x)$ может быть получено в виде линейной комбинации базисных функций:

$$u_p(x) = \sum_{i=1}^{N+L} \alpha_i \Phi(r_i). \quad (14)$$

Фундаментальное решение

Фундаментальное решение дифференциального уравнения Гельмгольца имеет радиальный вид относительно начала координат и представляется в виде радиальной функции. Фундаментальное решение $u^*(r)$ модифицированного уравнения Гельмгольца удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\nabla^2 u^*(r) - \lambda^2 u^*(r) = -\delta_i, \quad (15)$$

где δ_i – дельта-функция Дирака.

Для модифицированного уравнения Гельмгольца фундаментальное решение представляется в следующем виде:

$$u_m^*(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} K_0(\lambda r), & m = 2; \\ \frac{1}{4\pi r} e^{-\lambda r}, & m = 3; \end{cases} \quad (16)$$

где K_0 – модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка, m – размерность пространства.

Поскольку фундаментальное решение дифференциального уравнения является сингулярным в начале координат, то узлы, к которым "привязываются" фундаментальные решения, располагаются на фиктивной границе за пределами области решения краевой задачи (рис. 1).

Однородное решение $u_h(x)$ уравнения (6) аппроксимируется в виде линейной комбинации фундаментальных решений:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^M \beta_i u^*(r_i), \quad (17)$$

где M – количество узлов на фиктивной границе.

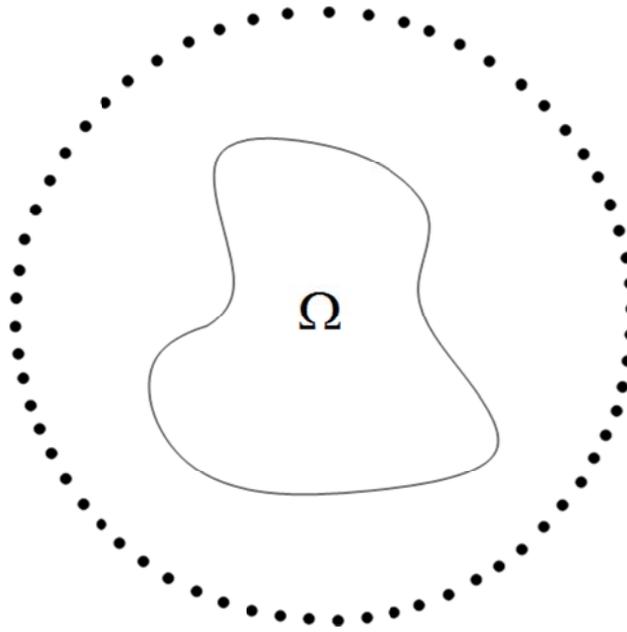


Рис. 1. Узлы на фиктивной границе.

Линейная комбинация фундаментальных решений по определению удовлетворяет модифицированному уравнению Гельмгольца во всех узлах области решения. Коэффициенты β_i выбираются таким образом, чтобы удовлетворить краевым условиям в выбранных узлах на границе решения. Используя метод коллокации в выбранных узлах на границе (17), получим:

$$\sum_{i=1}^M \beta_i u^*(r_{ij}) = g_1(x_j) - u_p(x_j), \quad j = 1, \dots, M_1, \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^M \beta_i \frac{\partial}{\partial n} u^*(r_{ij}) = g_2(x_j) - \frac{\partial}{\partial n} u_p(x_j), \quad j = M_1 + 1, \dots, M.$$

Ещё один недостаток фундаментальных решений проявляется в случае их использования при решении задач на многосвязных областях. В этом случае узлы, к которым "привязываются" фундаментальные решения, необходимо размещать также и в каждом отверстии многосвязной области, что в случае малых размеров отверстий может привести к ухудшению обусловленности системы линейных алгебраических уравнений.

Вышеперечисленных недостатков лишено общее решение дифференциального уравнения Гельмгольца.

Общее решение

Общее решение дифференциального уравнения существенно отличается от его фундаментального решения тем, что первое является всюду несингулярным, в то время как последнее является сингулярным в начале координат.

Общее решение $u^\#(r)$ модифицированного оператора Гельмгольца удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\nabla^2 u^\#(r) - \lambda^2 u^\#(r) = 0. \tag{20}$$

Для модифицированного уравнения Гельмгольца общее решение представляется в следующем виде:

$$u_m^\#(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} I_0(\lambda r), & m = 2; \\ \frac{1}{4\pi r} \sinh(-\lambda r), & m = 3; \end{cases} \quad (21)$$

где I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, m – размерность пространства.

Поскольку общее решение модифицированного уравнения Гельмгольца является несингулярным в начале координат, то узлы, к которым "привязываются" общие решения, размещаются в области решения краевой задачи (рис. 2).

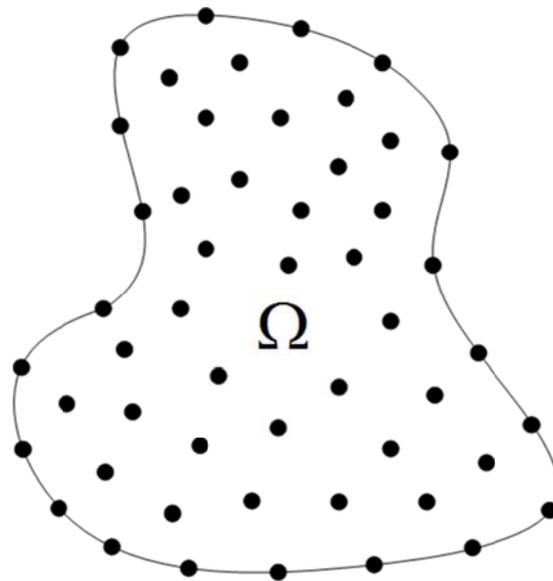


Рис. 2. Узлы, к которым "привязаны" общие решения.

Используя общее решение (21), однородное решение $u_h(x)$ уравнения (6) аппроксимируется в следующем виде:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^M \beta_i u^\#(r_i), \quad (22)$$

где β_i – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, M – количество узлов, к которым "привязаны" общие решения.

Произведя коллокацию (22) в выбранных узлах, получим:

$$\sum_{i=1}^M \beta_i u^\#(r_{ij}) = g_1(x_j) - u_p(x_j), \quad j = 1, \dots, M_1, \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^M \beta_i \frac{\partial}{\partial n} u^{\#}(r_{ij}) = g_2(x_j) - \frac{\partial}{\partial n} u_p(x_j), \quad j = M_1 + 1, \dots, M. \quad (24)$$

Теперь проведём численный сравнительный анализ решений двумерных задач теплопроводности по бессеточной схеме, полученных с использованием фундаментальных и общих решений модифицированного уравнения Гельмгольца.

Численные результаты

Задача 1. Двухмерная нестационарная краевая задача теплопроводности на единичной области в форме квадрата $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ (рис. 3).

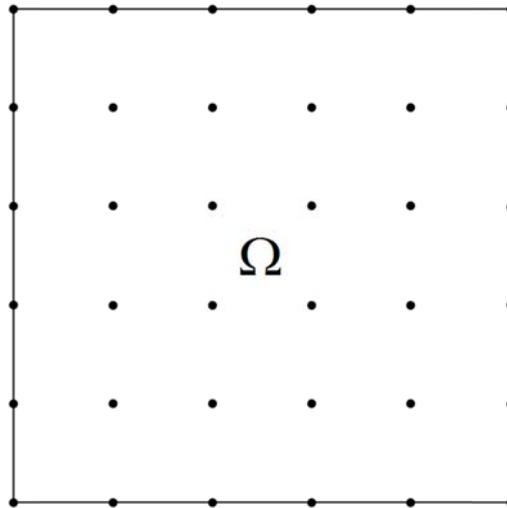


Рис. 3. Область решения краевой задачи.

Постановка задачи:

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} - k \nabla^2 u = g(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (25)$$

где $k=1$, $\rho=1$, $c_p=1$, $\Delta t=0,01$; $t \in [0,2]$, количество узлов на границе – 128, количество узлов на фиктивной границе – 121, количество узлов, к которым "привязано" общее решение – 121;

краевые и начальные условия:

$$u|_{\partial\Omega} = f(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (26)$$

$$u|_{t=0} = h(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (27)$$

Точное решение имеет вид:

$$u(x, y, t) = 0.8 \exp\left(-80\left((x-r(t))^2 + (y-s(t))^2\right)\right), \quad (28)$$

где $r(t) = \frac{1}{4}(2 + \sin(\pi t))$, $s(t) = \frac{1}{4}(2 + \cos(\pi t))$.

В качестве радиальной базисной функции выбрана мультиквадратичная функция $\Phi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$ с параметром формы $\varepsilon = 3$.

На рис. 4. представлена визуализация решения нестационарной краевой задачи в различные моменты времени.

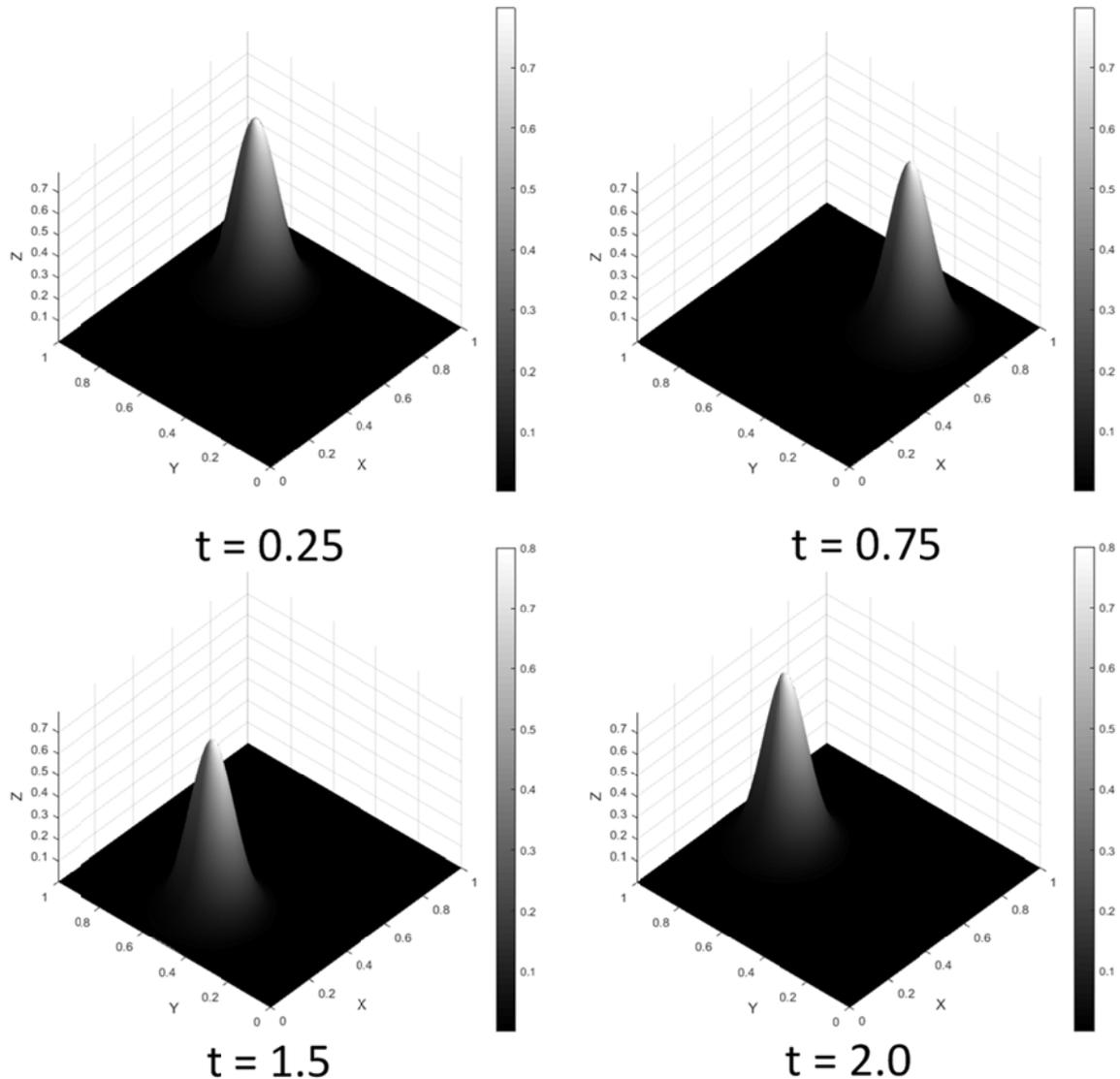


Рис. 4. Визуализация решения краевой задачи.

В табл. 1 приведены значения среднеквадратичной ошибки A_{err} решения данной краевой задачи для различного числа интерполяционных узлов N с использованием фундаментальных и общих решений.

На рис. 5 изображен график зависимости среднеквадратичной ошибки A_{err} решения краевой задачи от числа интерполяционных узлов N с использованием фундаментальных и общих решений.

Среднеквадратичная ошибка при использовании обоих решений убывает с увеличением числа интерполяционных узлов и при $N \geq 1000$ не превосходит $5 \cdot 10^{-7}$.

Таблица 1

Значения среднеквадратичной ошибки A_{err}

Фундаментальное решение		Общее решение	
N	A_{err}	N	A_{err}
144	2.5071e-05	144	4.1366e-05
169	4.8388e-06	169	2.7367e-05
225	1.1300e-06	225	2.4770e-05
289	1.4974e-07	289	3.3804e-06
441	1.8352e-07	441	9.4644e-07
676	1.7933e-07	676	4.8127e-07
841	1.8054e-07	841	1.0105e-06
1156	1.8163e-07	1156	4.6664e-07

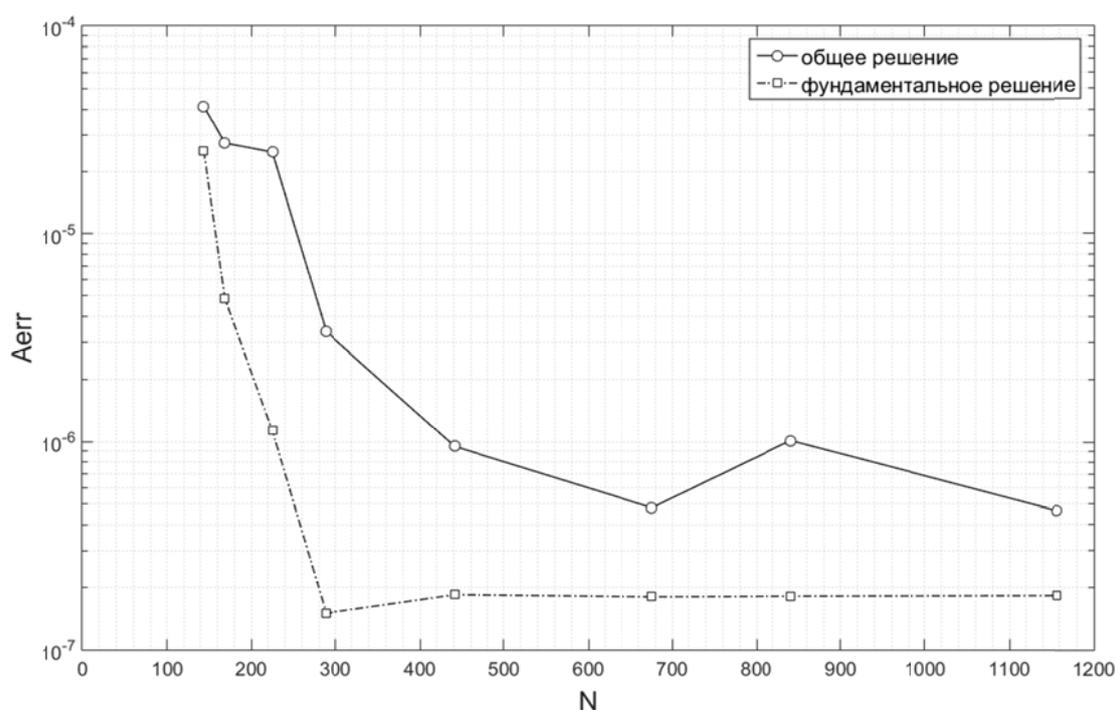


Рис. 5. Среднеквадратичная ошибка при использовании фундаментального и общего решений.

Задача 2. Двухмерная нестационарная краевая задача теплопроводности на единичной области в форме квадрата $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ (см. рис. 3).

Постановка задачи:

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} - k \nabla^2 u = g(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (29)$$

где $k=1$, $\rho=1$, $c_p=1$, $\Delta t=0,01$; $t \in [0,1]$; количество узлов на границе – 128, количество узлов на фиктивной границе – 128.

Краевые и начальные условия заданы в виде:

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (30)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (31)$$

Внутренний источник тепла описывается функцией:

$$g(x, y) = \sin(x) + \cos(y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (32)$$

В качестве радиальной базисной функции выбрана мультиквадратичная функция $\Phi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$ с параметром формы $\varepsilon = 3$.

В качестве верификационного решения было использовано решение данной краевой задачи, полученное с использованием MATLAB PDE Toolbox.

На рис. 6. представлена визуализация решения краевой задачи в момент 100-ой итерации.

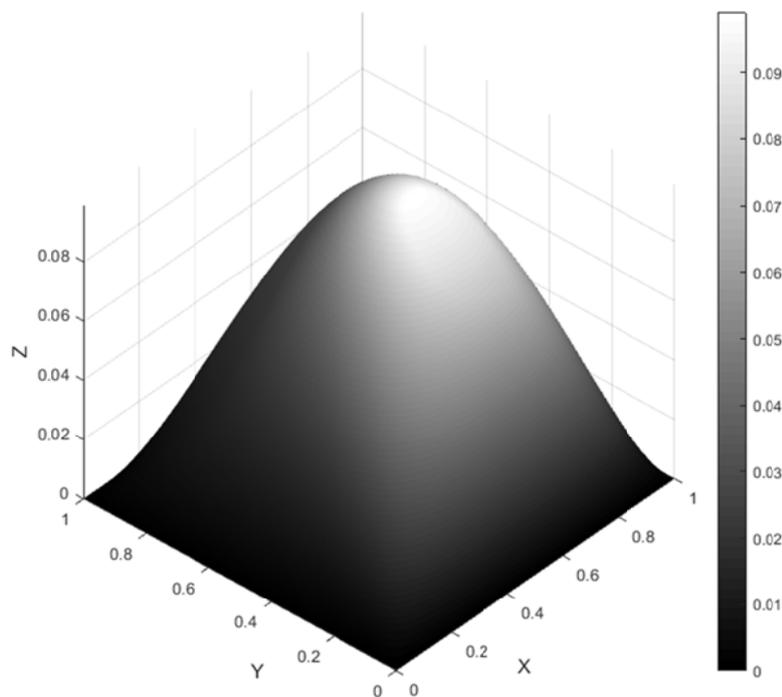


Рис. 6. Визуализация решения краевой задачи.

В табл. 2 приведены значения среднеквадратичной ошибки A_{err} решения данной краевой задачи для различного числа интерполяционных узлов N с использованием фундаментальных и общих решений.

Таблица 2

Значения среднеквадратичной ошибки A_{err}			
Фундаментальное решение		Общее решение	
N	A_{err}	N	A_{err}
289	2.4393e-09	289	6.8106e-09
441	2.1343e-09	441	6.4985e-09
676	2.2604e-09	676	6.4865e-09
841	2.2379e-09	841	6.9619e-09
1156	2.2123e-09	1156	6.3806e-09

На рис. 7 изображен график зависимости среднеквадратичной ошибки A_{err} решения краевой задачи от числа интерполяционных узлов N с использованием фундаментальных и общих решений.

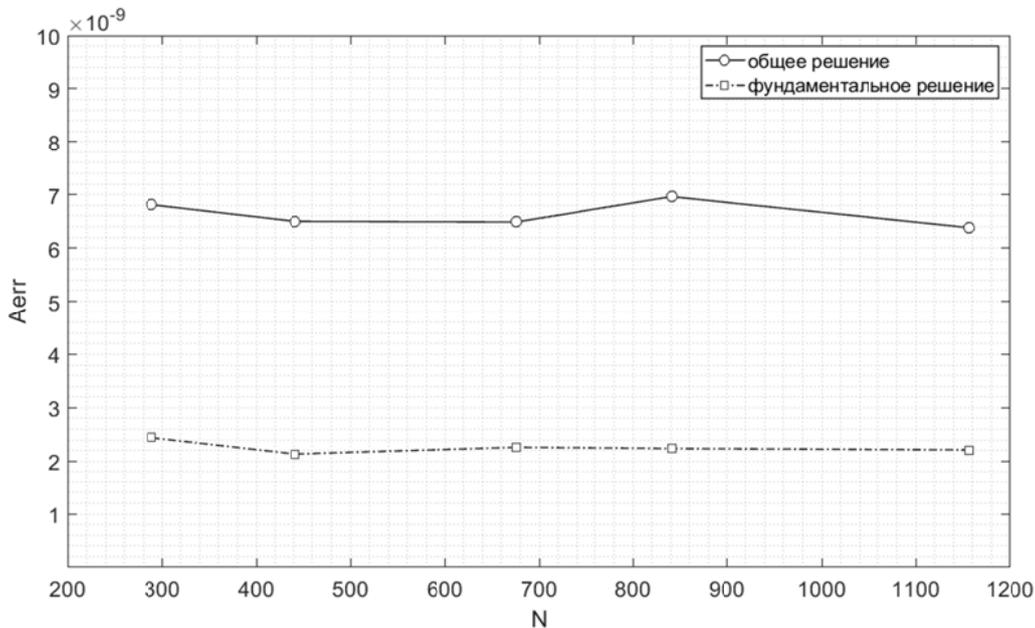


Рис. 7. Среднеквадратичная ошибка при использовании фундаментального и общего решений.

Среднеквадратичная ошибка при использовании обоих решений убывает с увеличением числа интерполяционных узлов и при $N \geq 1000$ не превосходит $7 \cdot 10^{-9}$.

Выводы

В данной работе проводился сравнительный анализ численных решений двумерных задач теплопроводности по бессеточной схеме, полученных с использованием фундаментальных и общих решений модифицированного уравнения Гельмгольца. Были получены решения краевой задачи для различного числа интерполяционных узлов, по результатам которых были посчитаны среднеквадратичные ошибки и построены графики зависимости среднеквадратичной ошибки от числа интерполяционных узлов. При использовании фундаментального и общего решений был получен одинаковый порядок точности решения краевой задачи.

Использование общего решения для аппроксимации однородного модифицированного уравнения Гельмгольца даёт существенное преимущество по сравнению с фундаментальным решением, так как позволяет избавиться от построения фиктивных границ, что в свою очередь снижает вычислительные затраты.

Список использованной литературы

1. Barnett A. H., Betcke T. Stability and convergence of the Method of Fundamental Solutions for Helmholtz problems on analytic domains. *Journal of Computational Physics*. 2018. Vol. 227. Issue 14. P. 7003–7026.
2. Chen W., Tanaka M. New insights in boundary-only and domain-type RBF methods. *International Journal Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2000. Vol. 1. P. 145–152.
3. Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994. Vol. 37. P. 229–256.

4. Belytschko T., Rongauz Y., Organ D. Meshless methods: an overview and recently developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996. Vol. 139. P. 3–47.
5. Belytschko T., Rongauz Y., Doblaw J. On the completeness of the meshfree particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1998. Vol. 43(5). P. 785–819.
6. Fasshauer G. E. Meshfree Approximation Methods with MATLAB. New York: World Scientific Publishing Co., 2007. 550 p.
7. Колодяжный В.М., Лисина О.Ю. Бессеточные методы в задачах моделирования физических процессов. *Проблемы машиностроения*. 2010. Т. 13, № 3. С. 67–74.
8. Колодяжный В.М., Лисина О.Ю. Численные схемы решения краевых задач на основе бессеточных методов с использованием РБФ и АРБФ. *Проблемы машиностроения*. 2010. Т. 13, № 4. С. 49–57.
9. Колодяжный В.М., Лисин Д.А. Бессеточные методы решения нестационарных задач теплопроводности с использованием атомарных радиальных базисных функций. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. Т. 49, №3. С. 124–131.
10. Лисин Д.А., Лисина О.Ю. Формирование процедуры решения краевой задачи теплопроводности по бессеточной схеме на основе атомарных радиальных базисных функций в комбинации методов фундаментальных решений и двойного замещения. *Краевые задачи и математическое моделирование: материалы X научной конференции (Новокузнецк, 26 ноября 2010)*. Т. 2. Новокузнецк, 2010. С. 17–22.

References

1. Barnett, A. H., & Betcke, T. (2018) Stability and Convergence of the Method of Fundamental Solutions for Helmholtz Problems on Analytic Domains. *Journal of Computational Physics*. **227**, 14, 7003–7026.
2. Chen, W., & Tanaka, M. (2000) New Insights in Boundary-Only and Domain-Type RBF Methods. *International Journal Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. **1**, 145–152.
3. Belytschko, T., Lu, Y. Y., & Gu, L. (1994) Element-Free Galerkin Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. **37**, 229–256.
4. Belytschko, T., Rongauz Y., & Organ, D. (1996) Meshless Methods: an Overview and Recently Developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, 3–47.
5. Belytschko, T., Rongauz. Y., & Doblaw, J. (1998) On the completeness of the meshfree particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. **43**, 5, 785–819.
6. Fasshauer, G. E. (2007) Meshfree Approximation Methods with MATLAB. New York: World Scientific Publishing Co., 2007.
7. Kolodyazhnyiy, V. M., & Lisina, O. Yu. (2010) Bessetochnye metody v zadachakh modelirovaniya fizicheskikh protsessov [Meshless methods in problems of modeling physical processes]. *Journal of Mechanical Engineering*. **13**, 3, 67–74.
8. Kolodyazhnyiy, V. M., & Lisina, O. Yu. (2010) Chislennyye skhemy resheniya kraevykh zadach na osnove bessetochnykh metodov s ispol'zovaniem RBF i ARBF [Numerical schemes for solving boundary value problems on the basis of meshless methods using RBF and ARBF]. *Journal of Mechanical Engineering*. **13**, 4, 49–57.
9. Kolodyazhnyiy, V. M., & Lisin, D. A. (2013) Bessetochnye metody resheniya nestatsionarnykh zadach teploprovodnosti s ispol'zovaniem atomarnykh radial'nykh bazisnykh funktsiy [Meshless methods for solving non-stationary heat conduction

- problems using atomic radial basis functions]. *Cybernetics and Systems Analysis*. **49**, 3, 124–131.
10. Lisin D. A., & Lisina O. Yu. (2010) Formirovanie protsedury resheniya kraevoy zadachi teploprovodnosti po bessetochnoy skheme na osnove atomarnykh radial'nykh bazisnykh funktsiy v kombinatsii metodov fundamental'nykh resheniy i dvoynogo zameshcheniya [Formation of the procedure for solving the boundary value problem of thermal conductivity using a meshless scheme based on atomic radial basis functions in a combination of fundamental solution method and dual reciprocity method]. *Proceedings of the Kraevye zadachi i matematicheskoe modelirovanie [Boundary value problems and mathematical modeling]* (Novokuznetsk, 2010, November, 26). Vol. 2. Novokuznetsk, 2010, pp. 17–22.