

УДК 534.1:539.3

**Н.В. СМЕТАНКІНА, С.В. УГРИМОВ**

Інститут проблем машинобудування ім. А.М Підгорного НАН України

### **АНАЛІЗ МІЦНОСТІ БАГАТОШАРОВОГО ОСКЛІННЯ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ ПРИ ВИСОКОШВИДКІСНОМУ УДАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

*Робота присвячена дослідженню відгуку багатошарового скла на швидкісний удар осесиметричним твердим тілом. Метою роботи є створення розрахункової методики для оцінки міцності авіаційного скла при взаємодії із ударником, що імітує кулю. Розглянуто основні відмінності у пробиванні крихкого і пластичного матеріалу. Оцінка ударостійкості оскління проводиться на основі аналізу глибини проникання ударника в пакет та процесу поширення хвиль деформацій у склі. Для оцінки глибини проникнення використовується емпірична залежність для обчислення напружень на поверхні контакту ударника із перешкодою, а для аналізу розповсюдження хвиль – тривимірні рівняння із врахуванням затухання за моделлю Кельвіна-Фойхта. Проведено тестовий розрахунок кількох композицій оскління. Запропонована методика може бути корисна при оцінці міцності оскління літальних апаратів та спеціальної військової техніки.*

*Ключові слова: багатошарове оскління, напружено-деформований стан, ударостійкість, розповсюдження хвиль, пробивання.*

**Н.В. СМЕТАНКИНА, С.В. УГРИМОВ**

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

### **АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ МНОГОСЛОЙНОГО ОСТЕКЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ**

*Работа посвящена исследованию отклика многослойного стекла на высокоскоростной удар осесимметричным твердым телом. Целью работы являются создание расчетной методики для оценки прочности авиационного остекления при взаимодействии с ударником, имитирующим пулю. Рассмотрены основные отличия в пробивании хрупких и пластических материалов. Оценка ударостойкости остекления проводится на основе анализа глубины проникания ударника в пакет и процесса распространения волн деформаций в стекле. Для оценки глубины проникания используется эмпирическая зависимость для вычисления напряжений на поверхности контакта ударника с препятствием, а для анализа распространения волн – трехмерные уравнения с учетом затухания по модели Кельвина-Фойхта. Проведен тестовый расчет нескольких композиций остекления. Предложенная методика может быть полезная при оценке прочности остекления летательных аппаратов и специальной военной техники.*

*Ключевые слова: многослойное остекление, напряженно-деформированное состояние, ударостойкость, распространение волн, пробивание.*

N.V. SMETANKINA, S.V. UGRIMOV

A. Pidgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine

## ANALYSIS OF STRENGTH OF MULTILAYER GLAZING OF AIRCRAFT AT HIGH-SPEED IMPACT LOADING

*The article is devoted to the investigation of the response of a multilayer glass to speed impact by an axisymmetric solid. The glazing of the aircraft has a multilayer structure, the carrier layers of which are made of silicate and organic glass, polycarbonate, which are joined together by bond layers. Such structure allows to provide a smaller structure weight with account all requirements to structure strength. The purpose of the work is to create a calculation method for assessing strength of the multilayer aviation glass when interacting with the impactor simulating a ball. The method includes an algorithm for determining dynamics of the impactor penetration into a multilayer glass. The differences in the breaking of fragile and plastic material are analyzed. When impact by a thin-walled homogeneous structure, which is made of brittle material, as a result of the interaction of the straight and reflected deformation waves, the knocking of the so-called Hertz cone is observed. When punching a multilayer glass, the impactor knocks out these cones from the glass and pushes them in front of it. As a result, the pressure on the next layer until the destruction of the cone acts on a larger area, and the speed of the impactor decreases due to the involvement in the movement of additional weight from the knocked cone. The evaluation of bulletproof of multilayer glass is based on the analysis of penetration depth of the ball into the package and propagation process of deformation waves in a glass. To estimate the penetration depth of a impactor into a glass, an empirical relationship is used to calculate stresses on the contact surface of the impactor with an target, and to analyze wave propagation we use three-dimensional equations with allowance for attenuation according to the Kelvin-Voigt model. The empirical dependence reflects the known determination of the value of media resistance as the sum of strength and inertial components. This addition is complemented by a mechanism that describes the process of sequentially knocking out the Hertz cones and their involvement in motion. The test calculation of several compositions was made, which confirmed the approach efficiency. The proposed method can be applied to the calculation of bullet resistance of glazing of military and special vehicles.*

*Keywords: multilayer glazing, stress-strained state, impact resistance, wave propagation, punching.*

### Постановка проблеми

Оскління літального апарата має багат шарову структуру, силові шари якого виготовляються із силікатного та органічного скла, полікарбонату, які з'єднуються між собою клейовими шарами. Така структура дозволяє забезпечити меншу вагу усієї конструкції, що є надзвичайно важливим для авіаційної техніки. У пакеті застосовуються зміцнені силікатні стекла (за допомогою хімічного травлення, іонного зміцнення, термічно зміцнені), міцність яких у разі відрізняється від відповідних характеристик звичайного скла. Механізм зміцнення при іонній й термічній обробці базується на створенні початкових стискаючих напружень, при хімічному – на стравлюванні поверхневого дефектного шару скла. При цьому змінюється й характер руйнування (розтріскування) стекол.

До оскління кабін цивільних літальних апаратів висувається цілий комплекс вимог щодо їх міцності. До оскління військових і військово-транспортних літальних апаратів додаються спеціальні вимоги щодо їх кулестійкості, а також до стійкості при ударі уламками й іншими вражаючими елементами. Кулестійкість авіаційного оскління

забезпечується за рахунок збільшення його товщини та встановленні скла під значними кутами атаки. Таким чином, в Україні існує нагальна потреба в розробці та виробництві високоєфективних прозорих броньованих стекол для військової авіаційної техніки з підвищеними характеристиками їх ударостійкості.

#### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Існують досить ефективні, як аналітичні так і чисельні методи для розрахунку міцності стекол при імпульсних навантаженнях [1–3]. Але задачі теоретичної оцінки ударо- та кулестійкості оскління є досить важкими для теоретичного дослідження. Це пов'язано з відомими математичними труднощами описання процесу пробивання крихкого багат шарового скла, зі складністю оцінки частини енергії, що вивільняється при розтріскуванні скла та ін.

Внаслідок фізичної та математичної складності описання високошвидкісного процесу проникання кулі в багат шарове середовище, на який впливають характеристики кулі та параметри пакету, точні аналітичні розв'язки цієї задачі відсутні. Саме тому, в практиці проектування світлопрозорих конструкцій істотне місце займають спрощені інженерні методи та широко використовуються натурні випробування зразків.

Дослідження, які присвячені питанням пробивання матеріалів проводили В. М. Аптуков [4, 5], В. Г. Баженов [6], М. В. Банічук [7], Ю. К. Бивин [8], В. А. Велданов [9], А. Я. Сагомоян [10], G. Ben-Dor, T. Elperin, A. Dubinsky [11, 12], W. Hu, Wang J. Yu, C. Yen, F. Bobaru [13], F. Ragnedda, M. Serra [14] та ін. Але вони стосуються передусім однорідних не світлопрозорих матеріалів і, як правило, мають експериментальний характер. Одним із найбільш розроблених напрямків є дослідження проникання металевих ударників у ґрунти, коли ударник можна вважати недеформованим [9, 10]. Динаміка проникання недеформованого ударника в перешкоду залежить від розподілу нормальних та зсувних напружень на поверхні контакту ударника з мішенню, який визначає силовий вплив на нього в процесі проникнення. При розрахунку проникання ударника у перешкоду використовуються різні методи. У найпростіших інженерних методах розрахунку контактні напруження визначаються за допомогою емпіричної залежності від швидкості кулі, зазвичай використовується поліном другого порядку, коефіцієнти якого характеризують динамічні властивості даної перешкоди та визначаються експериментально [9, 10]. У розрахункових методиках більш високого рівня силовий вплив на ударник одержується на основі чисельного моделювання з позицій механіки суцільних середовищ [9].

#### **Мета дослідження**

Метою роботи є створення чисельної методики для оцінки кулестійкості багат шарового авіаційного скла. Вона є продовженням циклу робіт, які пов'язані з розрахунком міцності оскління транспортних засобів при впливі різних експлуатаційних факторів [1–3, 15, 16].

#### **Викладення основного матеріалу дослідження**

**Методика розрахунку.** Прозора авіаційна броня повинна не допускати наскрізного пробивання кулями певного виду зброї та типу кулі. Вимоги до кулестійкості скла визначаються технічними вимогами до виробу. Загальні вимоги до характеристик кулетривкості та методів випробувань скла встановлює ДСТУ 4546:2006 [17]. Кулетривке скління, яке призначене протистояти певним рівням атаки, класифікується від BR1 до BR7 (від СК1 до СК6) у залежності від виду зброї, її калібру та типу кулі. Стекло вважається відповідним даному класу, якщо після трьох пострілів у вершини рівностороннього трикутника зі сторонами 120 мм не спостерігається прострілу скла кулею або її частками, а також немає прострілу фольги-свідка осколками скла з тильного боку його поверхні. Слід зазначити, що остання вимога

висувається до безосколкового скла, яке і використовується при осклінні літальних апаратів. При ударі по багатошаровому склу твердим тілом, яке має значну кінетичну енергію, навіть при відсутності наскрізного пробивання, іноді спостерігається вибивання пробки (відкол) з тильної сторони скла. Це викликано тим, що при ударі у склі виникають хвилі деформацій, які при проходженні кожної поверхні контакту шарів частково відбиваються назад, а частково переходять далі. При цьому з тильної сторони скла практично вся хвиля відбивається назад від вільної поверхні, що може привести при накладанні прямих і відбитих хвиль до відколу з тильної сторони. Слід зазначити, що при відображенні хвилі від поверхні контакту виникають поздовжні й зсувні хвилі, а їх швидкість уздовж границі середовищ, згідно закону Снелліуса, є сталою величиною.

Для забезпечення високої міцності й живучості прозора броня повинна мати здатність ефективно деформувати або руйнувати ударник (особливо це важливо на початку удару); високий опір пробиванню; здатність поглинати енергію без утворення великої кількості тріщин (наявність яких буде позначатися при наступних ударах). Реалізувати ці вимоги досить складно, оскільки скло є крихким матеріалом. Задача полягає в тому, щоб за рахунок вибору товщин силових і сполучних шарів забезпечити необхідну стійкість до пробивання. Скло повинно поглинути енергію кулі із найменшими руйнуваннями. При цьому більша частина енергії витрачається на пробивання й розтріскування шарів, а менша – на згинні коливання. Важлива роль у поглинанні енергії приділяється дисипативному ефекту.

Розглянемо схематично руйнування одношарової структури з крихкого матеріалу. При ударі кулею (бронебійним сердечником) у склі виникає хвиля стиску, яка після відбиття від тильної сторони стає хвилею розвантаження. Досягаючи лицьової сторони, вона, разом із хвилями стиску, призводить до руйнування скла й вибивання з нього так званого конуса Герца. На рис. 1 показано три початкові стадії удару твердим тілом, які передують пробиванню.

У випадку удару по багатошаровій структурі ударник вибиває конус Герца з першого шару й починає штовхати його перед собою. У результаті до моменту руйнування самого конуса тиск від ударника передається на наступний шар по площі істотно більшій, ніж при пробиванні пластичних матеріалів, коли дія тиску в основному обмежена діаметром кулі. Після руйнування конусу починається проникання ударника в уламки скла. Потім він досягає наступного силового шару й картина повторюється. При цьому ударник затуплюється, а її кінетична енергія зменшується.

Таким чином, при пробиванні багатошарового скла ударник послідовно вибиває конуси Герца й штовхає їх перед собою. У результаті тиск на наступний шар до моменту руйнування конуса діє по більшій площадці, а швидкість ударника падає через так званий ефект «приєднаної маси» від залученого в рух вибитого конусу.

В якості лицьової поверхні будь-якого шаруватого бронезахисту, зазвичай, використовуються шари з високою динамічною твердістю для більш ефективного деформування ударника на початку процесу удару. Динамічна твердість скла

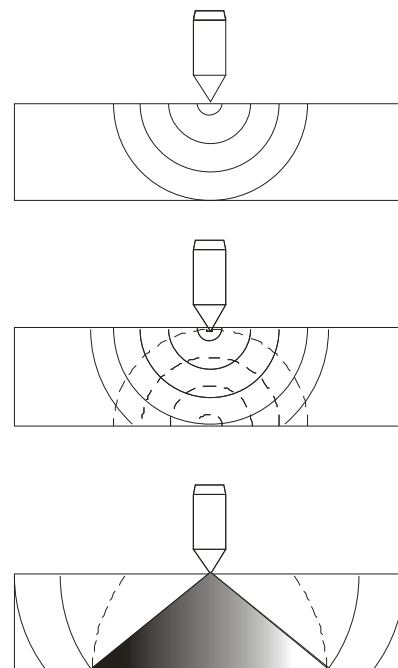


Рис. 1. Спрощена схема вибивання конусу Герца.

змінюється в невеликих межах і залежить від наявних домішок у склі. Використання в пакеті нових матеріалів, таких як Alon і сапфір [18], на даний момент є обмеженим через відносно високу їхню вартість і неможливість отримання молірованих (скривлених) стекол.

При оцінці кулестійкості прозорої броні необхідно враховувати два основних фактори, які ведуть до руйнування скла. Перший – це глибина безпосереднього проникнення кулі в пакет, а другий – поширення ударної хвилі у поперечному напрямку.

При ударі в шарах скла виникають хвилі деформацій, які розповсюджуються у склі зі швидкістю в рази вищою, а в клейових шарах – значно меншою, ніж швидкість кулі. Швидкість розповсюдження поздовжніх хвиль у склі при сталій густині складає біля 5000 м/с. При розповсюдженні хвиль у поперечному напрямку в багат шаровому склі спостерігається багатократне відбиття хвиль від кожної границі між шарами та зовнішніх поверхонь, спостерігається інтерференція хвиль. При цьому їх енергія згасає внаслідок внутрішнього тертя у матеріалі.

Аналіз робіт інших авторів [9, 10] показує, що опис процесу динамічного проникання твердого осесиметричного тіла у скло може ґрунтуватися на емпіричній залежності:

$$\sigma_n = H_d + k\rho V^2,$$

де  $\sigma_n$  – питома сила опору прониканню,  $H_d$  – динамічна твердість матеріалу середовища,  $k$  – коефіцієнт форми головної частини ударника,  $\rho$  – густина перешкоди,  $V$  – поточна швидкість.

Ця залежність відображає відому трактовку опору середовища як суму міцнісної та інерційної складових. Іноді у ній враховують і в'язкість матеріалу. Кожна із складових може мати головне значення при визначених швидкостях. Напруження зсуву на контактній поверхні проводиться на основі закону сухого тертя:

$$\tau = \mu\sigma_n,$$

де  $\mu$  – коефіцієнт поверхневого тертя ударника об середовище.

Таким чином, на елементарній площадці бічної поверхні конуса  $dS$  діє сила опору:

$$dP = (\sigma_n \sin \alpha + \tau \cos \alpha) dS,$$

де  $\alpha$  – половина кута розтвору конуса.

Починаючи з моменту проникання й до повної зупинки, на ударник діє сила опору, яка направлена протилежно вектору швидкості й дорівнює інтегралу по бічній поверхні зануреної частини ударника від проекції напружень на вісь ударника. Цю силу опору можна обчислити за співвідношенням:

$$P(z) = -2\pi(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha \int_0^z (z - \xi) (H_d(\xi) + k\rho(\xi) V^2(z)) d\xi,$$

де  $z$  – поточна глибина проникнення,  $\xi$  – координата, відлічувана від лицьової поверхні скла.

У результаті можна скласти рівняння руху ударника:

$$\frac{dV}{dt} = V \frac{dV}{dz} = -\frac{2\pi}{M} (1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha \int_0^z (z - \xi) (H_d(\xi) + k\rho(\xi)V^2(z)) d\xi.$$

Ця емпірична модель доповнюється механізмом, що описує процес послідовного вибивання конусів і залучення їх у рух.

У результаті розв'язання отриманого рівняння можна оцінити силу, яка діє на ударник, і глибину його проникання в перешкоду. Знаючи її, можна оцінити деформацій ударника та скорегувати його геометрію під час удару.

Оскільки процес удару супроводжується розповсюдженням хвиль у склі, необхідно паралельно проводити оцінку напружень, які виникають у ньому. Руйнування у склі можуть з'являтися не лише в місці безпосереднього контакту ударника зі склом, а також у внутрішніх шарах. У момент досягнення ударником нового шару він фактично може бути вже розтрісканим, що знижує його ударостійкість.

Для аналізу процесу розповсюдження хвиль й нестационарного напружено-деформованого стану у багатошаровому склі розглядається задача про удар твердим тілом по багатошаровій прямокутній пластині (рис. 2).

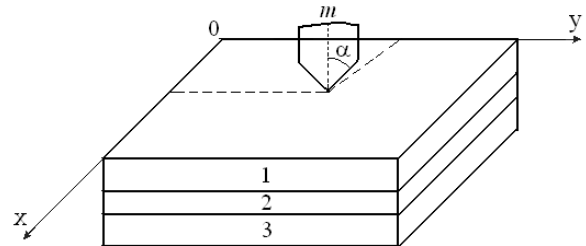


Рис. 2. Модель багатошарового скла.

При зіткненні з перепоною ударник масою  $M$  має швидкість  $V_0$ . Для спрощення викладення кулю можна вважати стрижнем скінченної довжини з кінцевою головною частиною. Радіус циліндричної частини  $R$ . Кут розвору конуса дорівнює  $2\alpha$ .

Динамічний процес впливу кулі на перешкоду досліджується на основі тривимірної еластодинаміки з урахуванням затухання за моделлю Кельвіна-Фойхта [19], згідно якої деформації можна представити у вигляді:

$$\mathcal{E}_\alpha^i = \left(1 + k_i \frac{\partial}{\partial t}\right) \varepsilon^i, \quad \mathcal{E}_{\beta\nu}^i = \left(1 + k_i \frac{\partial}{\partial t}\right) \gamma_{\beta\nu}^i, \quad \alpha = (x, y, z), \quad \beta, \nu = (x, y, z), \quad \beta \neq \nu,$$

де  $k_i$  – коефіцієнт затухання в  $i$ -му шарі;  $\mathcal{E}_\alpha^i, \mathcal{E}_{\beta\nu}^i$  – деформації в  $i$ -му шарі;  $\varepsilon^i, \gamma_{\beta\nu}^i$  – деформації Коші:

$$\varepsilon_x^i = u_{,x}^i, \quad \varepsilon_y^i = v_{,y}^i, \quad \varepsilon_z^i = w_{,z}^i, \quad \gamma_{xy}^i = u_{,y}^i + v_{,x}^i, \quad \gamma_{xz}^i = u_{,z}^i + w_{,x}^i, \quad \gamma_{yz}^i = v_{,z}^i + w_{,y}^i.$$

Тут  $u^i, v^i, w^i$  – переміщення точки  $i$ -го шару у напрямку координатних осей.

У результаті система тривимірних рівнянь, що описує поведінку багатошарової прямокутної пластини при впливі нестационарного навантаження із урахуванням затухання за моделлю Кельвіна-Фойхта, має вигляд:

$$(\lambda_i + \mu_i)(u_{,x}^i + v_{,y}^i + w_{,z}^i)_{,x} + \mu_i(u_{,xx}^i + u_{,yy}^i + u_{,zz}^i) + k_i(\lambda_i + \mu_i)(u_{,x}^i + v_{,y}^i + w_{,z}^i)_{,xt} + k_i\mu_i(u_{,xx}^i + u_{,yy}^i + u_{,zz}^i)_{,t} - \rho_i u_{,tt}^i = P_x^i,$$

$$\begin{aligned}
 &(\lambda_i + \mu_i)(u_{,x}^i + v_{,y}^i + w_{,z}^i)_{,y} + \mu_i(v_{,xx}^i + v_{,yy}^i + v_{,zz}^i) + k_i(\lambda_i + \mu_i)(u_{,x}^i + v_{,y}^i + w_{,z}^i)_{,yt} + \\
 &\quad + k_i\mu_i(v_{,xx}^i + v_{,yy}^i + v_{,zz}^i)_{,t} - \rho_i v_{,tt}^i = P_y^i, \\
 &(\lambda_i + \mu_i)(u_{,x}^i + v_{,y}^i + w_{,z}^i)_{,z} + \mu_i(w_{,xx}^i + w_{,yy}^i + w_{,zz}^i) + k_i(\lambda_i + \mu_i)(u_{,x}^i + v_{,y}^i + w_{,z}^i)_{,zt} + \\
 &\quad + k_i\mu_i(w_{,xx}^i + w_{,yy}^i + w_{,zz}^i)_{,t} - \rho_i w_{,tt}^i = P_z^i, \quad i = \overline{1, I},
 \end{aligned}$$

де  $\lambda_i, \mu_i$  – пружні константи Ляме;  $\rho_i$  – густина матеріалу  $i$ -го шару.

Граничні умови на поверхні першого і останнього шарів:

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz}^1 = \tau_{yz}^1 = \sigma_z^1 = 0, \quad \text{при } z = 0, \\
 \tau_{xz}^I = \tau_{yz}^I = \sigma_z^I = 0, \quad \text{при } z = \delta_I.
 \end{aligned}$$

Умови контакту сусідніх шарів:

$$\begin{aligned}
 u^i = u^{i+1}, \quad v^i = v^{i+1}, \quad w^i = w^{i+1}, \\
 \tau_{xz}^i = \tau_{xz}^{i+1}, \quad \tau_{yz}^i = \tau_{yz}^{i+1}, \quad \sigma_z^i = \sigma_z^{i+1}, \quad \text{при } z = \delta_i, \quad i = \overline{1, I-1}.
 \end{aligned}$$

Умови на контурі опирання:

$$\begin{aligned}
 v^i = w^i = \sigma_x^i = 0, \quad \text{при } x = 0, x = A, \\
 u^i = w^i = \sigma_y^i = 0, \quad \text{при } y = 0, y = B.
 \end{aligned}$$

Тут  $\sigma_x^i = 2\mu_i \varepsilon_x^i + \lambda_i \Delta^i$ ,  $\sigma_y^i = 2\mu_i \varepsilon_y^i + \lambda_i \Delta^i$ ,  $\sigma_z^i = 2\mu_i \varepsilon_z^i + \lambda_i \Delta^i$ ,  $\tau_{xy}^i = \mu_i \gamma_{xy}^i$ ,  
 $\tau_{xz}^i = \mu_i \gamma_{xz}^i$ ,  $\tau_{yz}^i = \mu_i \gamma_{yz}^i$ ,  $\Delta^i = \varepsilon_x^i + \varepsilon_y^i + \varepsilon_z^i$ .

Наведена вище система доповнюється початковими умовами:

$$u^i = v^i = w^i = u_t^i = v_t^i = w_t^i = 0 \quad \text{при } t = 0.$$

Таким чином, поведінка багатошарової прямокутної пластини описується у рамках тривимірної теорії пружності, при цьому затухання враховується за моделлю Кельвіна- Фойхта. Порядок системи залежить від кількості шарів у пластині і становить  $3I$ .

Слід зазначити, що при моделюванні можна врахувати й проникання ударника в зруйновану частину, аналогічно тому, як це було запропоновано в роботі [20] за допомогою введення відповідного тензора руйнування.

Навантаження від кулі моделюється впливом масових сил  $\bar{P}^i$ , які розподілені в об'ємі, що займає конічна частина кулі при прониканні в даний момент часу  $t$ .

Коли  $z > e$ , в об'ємі, розташованому в інтервалі  $[0, z - e]$  (циліндрична частина),  $\bar{P}^i \equiv 0$  (рис. 3).

В об'ємі, що займає конічна частина кулі,  $P_x^i = f_r^i \cdot \cos \varphi$ ,  $P_y^i = f_r^i \cdot \sin \varphi$ ,  $P_z^i = f_z^i$ ,  $i = \overline{1, I}$ , де  $\varphi$  – полярний кут.

Радіус перерізу конуса  $r(\xi) = R(z - \xi)/e$ , при  $z - e \leq \xi \leq z$ .

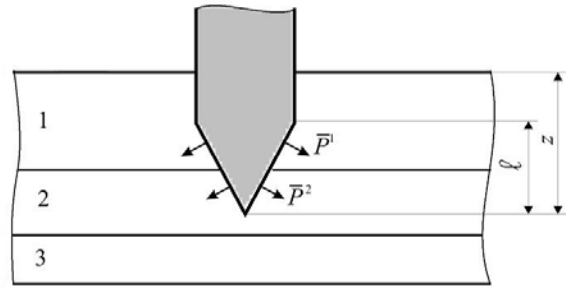


Рис. 3. Навантаження масовими силами  $\bar{P}^i$ .

Величини  $f_r^i, f_z^i$  визначаються в процесі розв'язання задачі про проникання кулі в багат шарову перешкоду в кожний момент часу  $t$ .

**Метод розв'язання задачі.** Шукані переміщення й зовнішні навантаження розкладаються в ряди по функціях, що задовольняють умовам на контурі опирання:

$$u^i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{1mn}^i B_{1mn}(x, y), \quad v^i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2mn}^i B_{2mn}(x, y), \quad w^i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{3mn}^i B_{3mn}(x, y),$$

$$P_x^i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{1mn}^i \cdot B_{1mn}(x, y), \quad P_y^i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2mn}^i \cdot B_{2mn}(x, y), \quad P_z^i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{3mn}^i \cdot B_{3mn}(x, y).$$

У випадку шарнірного опирання функції  $B_{imn}$  мають вигляд [1]:

$$B_{1mn}(x, y) = \cos \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B}, \quad B_{2mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{A} \cos \frac{n\pi y}{B}, \quad B_{3mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B}.$$

Крім того, похідні за поперечною координатою  $z$  замінюються їх скінченно-різницевиими виразами. Для цього використовуються симетричні різниці. В результаті може бути отримана система звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Коефіцієнти розвинення зовнішніх навантажень  $P_{1mn}^i, P_{2mn}^i, P_{3mn}^i$  при умові шарнірного обпирання скла дорівнюють:

$$P_{1mn}^i = \frac{4}{AB} \int_0^A \int_0^B f_r^i \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \cos \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B} dx dy =$$

$$= \frac{4\pi^3 R_i^3 m f_r^i}{AB (\rho_{mn}^i)^2} \sin(\alpha x_0) \cdot \sin(\beta y_0) J_2 [J_0(\rho_{mn}^i) H_1(\rho_{mn}^i) - J_1(\rho_{mn}^i) H_0(\rho_{mn}^i)],$$

$$P_{2mn}^i = \frac{4}{AB} \int_0^A \int_0^B f_r^i \frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \sin \frac{m\pi x}{A} \cos \frac{n\pi y}{B} dx dy =$$

$$= \frac{4\pi^3 R_i^3 n f_r^i}{AB} \sin(\alpha x_0) \cdot \sin(\beta y_0) [J_0(\rho_{mn}^i) H_1(\rho_{mn}^i) - J_1(\rho_{mn}^i) H_0(\rho_{mn}^i)],$$

$$P_{3mn}^i = \frac{4}{AB} \int_0^A \int_0^B f_z^i \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B} dx dy = \frac{8\pi R^2 f_z^i}{AB (\rho_{mn}^i)} \sin(\alpha x_0) \cdot \sin(\beta y_0) J_1(\rho_{mn}^i),$$

де  $\rho_{mn}^i = R^i \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ;  $\alpha = \frac{m\pi}{A}$ ;  $\beta = \frac{n\pi}{B}$ ;  $J_1$  – функція Бесселя;  $H_1$  – функція Струве.



**Чисельне дослідження.** Проведено дослідження міцності багатошарового скла при однократному ударі кулею зі сталевим нетермозміцненим осердям масою 3,4 г при швидкості зіткнення 900 м/с, що відповідає вимогам класу кулетривкості BR5 (СКЗ).

Розглянуто декілька багатошарових композицій, які складаються з шарів скла силікатного та залізного клею.

У табл. 1 наведено розглянуті композиції стекол та результати розрахунку глибини проникнення кулі. У композиції товщини вказуються послідовно, починаючи із лицьового шару, без дужок наведено товщини шарів із скла силікатного, а в дужках – товщини клейових шарів. Результати розрахунку дають дещо завищене значення глибини проникнення по відношенню до реальної.

Таблиця 1

Композиції скла та глибина проникнення кулі

Номер композиції	Композиція скла	Товщина скла, мм	Глибина проникнення кулі, мм
1	4(1) 4(1) 4(1) 4(1) 4(1) 4(1) 4(1) 4(1) 4	44	17,5
2	6(1) 6(1) 6(1) 6(1) 6(1) 6(1) 6	48	16,6
3	10(1) 8(1) 8(1) 6(1) 4(1) 4	45	15,8
4	10(1) 8(1) 8(1) 6(1) 6(1) 4	46	15,8

### Висновки

Розглянуто задачу аналізу кулетійкості оскління літальних апаратів при ударі кулею. Оцінка кулетійкості багатошарового скла проводиться на основі аналізу глибини проникання кулі в пакет та процесу поширення хвиль деформацій у склі. Пробивання багатошарового скла супроводжується вибиванням конусів Герца. У результаті тиск на наступний шар до моменту руйнування конуса діє по більшій площадці, а швидкість ударника зменшується через залучення в рух додаткової ваги від вибитого конусу. Проведено тестовий розрахунок декількох композицій оскління, який довів працездатність розробленого методу.

Запропонована методика може бути застосована до розрахунку кулетійкості оскління військових та спеціальних транспортних засобів.

Роботу виконано у рамках Цільової комплексної програми наукових досліджень НАН України "Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин" ("Ресурс-2").

### Список використаної літератури

1. Сметанкіна Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек : монография. Харків: Міськдрук, 2011. 376 с.
2. Сметанкіна Н.В., Угримов С.В. Математичне моделювання відгуку багатошарового скла на вибухове навантаження з урахуванням фази розрідження. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. № 3(1). С. 164–170.
3. Родічев Ю.М., Сметанкіна Н.В., Шупіков О.М., Угримов С.В. Аналіз напружено-деформованого стану багатошарового оскління кабін пілотів літальних апаратів під впливом статичних і динамічних навантажень. *Проблеми міцності*. 2018. № 6. С. 49–56.
4. Аптуков В.Н., Мурзакаев А.В., Фонарев А.В. Прикладная теория внедрения. М.: Наука, 1992. 105 с.

5. Аптуков В.Н., Хасанов А.Р. Оптимизация параметров слоистых пластин при динамическом проникании жесткого индентора с учетом трения и ослабляющего действия свободных поверхностей. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2014. № 2. С. 48–75.
6. Баженов В.Г. и др. Экспериментально-теоретический анализ нестационарных процессов взаимодействия деформируемых ударников с грунтовой средой. *Прикладная механика и техническая физика*. 2001. Т. 42, № 6. С. 190–198.
7. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Оптимизация: контактные задачи и высокоскоростное проникание. М: Физматгиз, 2016. 176 с.
8. Бивин Ю.К., Симонов И.В. Механика динамического проникания в грунтовую среду. *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2010. № 6. С. 157–191.
9. Велданов В.А. и др. Расчет проникания недеформируемых ударников в малопрочные преграды с использованием данных пьезоакселерометрии. *Журнал технической физики*. 2011. Т. 81 (7). С. 94–104.
10. Сагомоян А.Я. Проникание. М.: Изд-во Московского ун-та, 1974. 300 с.
11. Ben-Dor G., Dubinsky A., Alperin T. High-speed penetration dynamics: engineering models and methods. World Scientific Publishing Company, 2013. 696 p.
12. Ben-Dor G., Dubinsky A., Alperin T. Applied high-speed plate penetration dynamics. Dordrecht, Netherland: Springer, 2006. 357 p.
13. Hu W., Wang Y., Yu J., Yen C., Bobaru F. Impact damage on a thin glass plate with a thin polycarbonate backing. *International Journal of Impact Engineering*. 2013. № 62. P. 152–165.
14. Ragnedda F., Serra M. Optimum shape of high speed impactor for concrete targets using PSO heuristic. *Engineering*. 2010. Vol. 2(4). P 257–262.
15. Shupikov A.N., Ugrimov S.V., Kolodiazny A.V., Yareschenko V.G. High-order theory of multilayer plates. The impact problem. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 35, № 25. P. 3391–3404.
16. Shupikov A.N. et al. Bird dummy for investigating the bird-strike resistance of aircraft component. *Journal of Aircraft*. 2013. Vol. 50, № 3. P. 817–826.
17. ДСТУ 4546:2006. Скло в будівництві. Захисне скління. Випробовування та класифікація за кулетривкістю. [Чинний від 2006-09-01]. Київ: Держспоживстандарт України, 2006. 10 с.
18. Притула І.М. та ін. Кулестійкі сапфіро-скляні бронепакети для військової техніки. *Актуальні питання забезпечення службово-бойової діяльності військових формувань та правоохоронних органів: зб. тез. доп. наук.-практ. конф.*(Харків, 26 жовтня 2017 р.). Харків: Національна академія Національної гвардії України, 2017. С. 126–127.
19. Василенко Н. В. Теория колебаний. Киев: Вища школа, 1992. 430 с.
20. Sun X., Khaleel M.A. Modeling of glass fracture damage using continuum damage mechanics – static spherical indentation. *International Journal of Damage Mechanics*. 2004. Vol. 13(3). P. 263–285.

### References

1. Smetankina, N. V. (2011) Nestatsionarnoe deformirovanie, termouprugost i optimizatsiya mnogosloynnyh plastin i tsilindricheskih obolochek : monografiya. Harkiv: Miskdruk. (in Russian).
2. Smetankina, N. V., & Ugrimov, S. V. (2018) Matematychni modeliuvannia vidhuku bahatosharovo-ho skla na vybukhove navantazhennia z urakhuvanniam fazy rozridzhennia. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. 3, 1, 164–170. (in Ukrainian).

3. Rodichev, Yu. M., Smetankina, N. V., Shupikov, O. M., & Ugrimov S. V. (2018) Analiz napruzhenno-deformovanoho stanu bahatosharovoho osklinnia kabin pilotiv litalnykh aparativ pid vplyvom statychnykh i dynamichnykh navantazhen. *Problemy mitsnosti*. **6**, 49–56. (in Ukrainian).
4. Aptukov, V. N., Murzakaev, A. V., & Fonarev, A. V. (1992) *Prikladnaya teoriya vnedreniya*. M.: Nauka. (in Russian).
5. Aptukov, V. N., & Hasanov, A. P. (2014) Optimizatsiya parametrov sloistyih plastin pri dinamicheskom pronikanii zhestkogo indentora s uchetom treniya i oslablyayushego deystviya svobodnyih poverhnostey. *Vestnik PNIPU. Mehanika*. **2**, 48–75. (in Russian).
6. Bazhenov, V. G. i dr. (2001) Eksperimentalno-teoreticheskiy analiz nestatsionarnykh protsessov vzaimodey-stviya deformiruemykh udarnikov s gruntovoy sredoy. *Prikladnaya mehanika i tehnikeskaya fizika*. **42**, 6, 190–198. (in Russian).
7. Banichuk, N. V., & Ivanova, S. Yu. (2016) Optimizatsiya: kontaktnyye zadachi i vyisokoskorostnoe pronikanie. M: Fizmatgiz. (in Russian).
8. Bivin, Yu. K., & Simonov, I. V. (2010) Mehanika dinamicheskogo pronikaniya v gruntovuyu sredu. *Izvestiya RAN. Mehanika tverdogo tela*. **6**, 157–191. (in Russian).
9. Veldanov, V.A. i dr. (2011) Raschet pronikaniya nedeformiruemykh udarnikov v maloprochnyye pregradyi s ipol-zovaniem dannykh pezoakselerometrii. *Zhurnal tehnikeskoy fiziki*. **81**, 7, 94–104. (in Russian).
10. Sagomonyan, A. Ya. (1974) *Pronikanie*. M.: Izd-vo Moskovskogo un-ta. (in Russian).
11. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., & Alperin, T. (2013) *High-Speed Penetration Dynamics: Engineering Models and Methods*. World Scientific Publishing Company.
12. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., & Alperin, T. (2006) *Applied high-speed plate penetration dynamics*. Dordrecht, Netherland: Springer.
13. Hu, W., Wang, Y., Yu, J., Yen, C., & Bobaru, F. (2013) Impact damage on a thin glass plate with a thin polycarbonate backing. *International Journal of Impact Engineering*. **62**, 152–165.
14. Ragnedda, F., & Serra, M. (2010) Optimum shape of high speed impactor for concrete targets using PSO heuristic. *Engineering*. **2**, 4, 257–262.
15. Shupikov, A. N., Ugrimov, S. V., Kolodiazhny, A. V., & Yareschenko, V. G. (1998) High-order theory of multilayer plates. The impact problem. *International Journal of Solids and Structures*. **35**, 25, 3391–3404.
16. Shupikov, A.N. et al. (2013) Bird dummy for investigating the bird-strike resistance of aircraft component. *Journal of Aircraft*. **50**, 3, 817–826.
17. DSTU 4546:2006. Sklo v budivnytstvi. Zakhysne sklinnia. Vyprobuvuvannya ta klasyfikatsiia za kuletryvkistiu [Glass in building. Security glazing. Testing and classification of resistance against bullet attack]. [2006-09-01]. Kyiv: Derzhspozhyvstandart Ukraine, 2006. 10 p. (in Ukrainian).
18. Prytula, I. M. ta in. (2017) Kulestiiki sapfiro-skliani bronepakety dlia viiskovoi tekhniki. *Aktualni pytannia zabezpechennia sluzhbovo-boiovoi diialnosti viiskovykh formuvan ta pravookhoronnykh orhaniv*: proceeding of scientific-practical conference. (Kharkiv, 2017, October, 26). Kharkiv: National Academy of the National Guard of Ukraine, pp. 126–127. (in Ukrainian).
19. Vasilenko, N. V. (1992) *Teoriya kolebaniy*. Kiev: Vischa shkola. (in Russian).
20. Sun, X., & Khaleel, M. A. (2004) Modeling of glass fracture damage using continuum damage mechanics – static spherical indentation. *International Journal of Damage Mechanics*. **13**, 3, 263–285.