УДК 539.3

О.О. УСАТОВА, Д.В. КРЮТЧЕНКО
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ В КОАКСІАЛЬНИХ ОБОЛОНКАХ

В наш час існує багато невирішених проблем стосовно міцності коаксіальних оболонок, частково наповнених ідеальною нестисливою рідиною. Тому у зв'язку з цим, виникає необхідність розгляду задач, пов'язаних із дослідженням динамічної взаємодії коаксіальних оболонки з рідиною. Задачі нестаціонарного деформування таких оболонок є найменш дослідженими і потребують більшої уваги. Визначивши область інтегрування в задачах стосовно коаксіальної оболонки, можна застосувати інтегрування за часом системи рівнянь Нав'є–Стокса, яка описує поведінку ідеальної і в'язкої рідини, але виникає утруднення, а саме коли рідина є нестисливою або слабо стислива – в такому випадку не використовують прямий спосіб інтегрування за часом. Використовуючи метод граничних елементів, можна розв'язати відповідну крайову задачу. Зауважимо, що рух рідини є безвихровим, і це дозволяє нам використовувати потенціал швидкостей, який задовольняє рівнянню Лапласа та граничним умовам, як на жорстких поверхнях оболонки, так і на вільній поверхні рідини, оскільки рух об'єму рідини повністю визначається рухом поверхонь, що його обмежують. Опис поведінки рідини з вільною поверхнею може бути зведений до сукупності залежностей, які представляють собою умови кінематичного і динамічного характеру. Кінематичні умови можна розглядати як механічні зв'язки, які накладають обмеження на варіації невідомих, динамічні граничні умови випливають з варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського як природні. Тиск рідини буде задовольняти рівнянню Коші–Лагранжа. Стінки оболонки можна вважати абсолютно твердими. Власні частоти коливання рідини значно менші, ніж власні частоти коливання пружної оболонки з рідиною. Впливом поверхневого натягу можна знехтувати, тобто вплив поверхневого натягу на коливання рідини вважаємо малим. Проведено розрахунки, які дають можливість визначити частоти і форми плескання рідини в коаксіальних оболонках. Розглянуті вимушені коливання рідини під дією горизонтальних гармонічних, імпульсних та сейсмічних навантажень.

Ключові слова: коаксіальні оболонки, метод граничних елементів, вимушені коливання, ідеальна нестислива рідина.

О.А. УСАТОВА, Д.В. КРЮТЧЕНКО
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В КОАКСИАЛЬНЫХ ОБОЛОЧКАХ

В наше время существует много нерешенных проблем относительно прочности коаксиальных оболочек, частично заполненных идеальной несжимаемой жидкостью. В связи с этим, возникает необходимость рассмотрения задач, связанных с исследованием динамического взаимодействия коаксиальных оболочек с жидкостью. Задачи нестационарного деформирования таких оболочек являются наименее исследованными и нуждаются в большем внимании. Предполагается, что жидкость является несжимаемой или слабо сжимаемой. Используя метод граничных элементов, можно решить соответствующую краевую задачу. Заметим, что движение жидкости является безвихревым и это позволяет нам использовать потенциал скоростей, который удовлетворяет условию Лапласа и граничным условиям, на

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.9

жестких поверхностях оболочки, и на свободной поверхности жидкости, так как движение объема жидкости полностью определяется движением поверхности, что его ограничивают. Описание поведения жидкости со свободной поверхностью может быть сведено к совокупности зависимостей, которые представляют собою условия кинематического и динамического характера. Кинематические условия можно рассмотреть, как механические связи, которые накладывают ограничения на вариации неизвестных, динамические условия вытекают из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского, как естественные. Давление жидкости будет удовлетворять условию Коши–Лагранжа. Стенки оболочки можно считать абсолютно жесткими. Собственные частоты колебаний жидкости, значительно меньше, чем собственные частоты колебаний упругой оболочки с жидкостью. Влиянием поверхностного натяжения можно пренебречь, то есть влияние поверхностного натяжение на колебания жидкости, представляем малым. Проведены расчеты, которые дают возможность определить частоты и формы плескания жидкости в коаксиальных оболочках. Рассмотрены вынужденные колебания жидкости под действием горизонтальных гармонических, импульсных и сейсмических нагрузок.

Ключевые слова: коаксиальные оболочки, метод граничных элементов, вынужденные колебания, идеальная несжимаемая жидкость.

O.A. USATOVA, D.V. KRUTCHENKO
A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences

FORCED LIQUID OSCILLATIONS IN COAXIAL SHELLS

There are many unsolved problems regarding the strength of coaxial shells partially filled with an ideal incompressible fluid. In this regard, it becomes necessary to consider problems associated with studying the dynamic interaction of coaxial shells with a liquid. The problems of unsteady deformation of such shells are insufficiently studied and need more attention. Having determined the region of integration, supposed that the fluid is incompressible or weakly compressible, and using the boundary element method, we can solve the corresponding boundary value problem. Note that the fluid motion is vortex-free and this allows us to use the velocity potential, which satisfies the Laplace equation and the boundary conditions, both on rigid surfaces of the shell and on the fluid free surface, since the motion of the fluid volume is completely determined by the motion of its boundary surface. A description of the liquid behavior with the free surface can be summarized in set of dependencies, which are conditions of a kinematic and dynamic nature. Kinematic conditions can be considered as mechanical bonds that impose restrictions on the variations of the unknowns, dynamic conditions follow from the variational principle of Hamilton–Ostrogradsky, as natural ones. The fluid pressure will satisfy the Cauchy–Lagrange conditions. The walls of the shell can be considered as rigid ones. The natural frequencies of the fluid are essentially less than the natural frequencies of the elastic shell with the liquid. The effect of surface tension can be neglected, that is, the effect of surface tension on fluid vibrations is small. The calculations are performed, which make it possible to determine the frequencies and modes of liquid sloshing in coaxial shells. The forced oscillations of the fluid under the influence of horizontal harmonic, impulse and seismic loads are considered.

Keywords: coaxial shells, boundary element method, forced oscillations, ideal incompressible fluid.

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.9

Постановка проблеми

Коаксіальні оболонки є об’єктом багатьох теоретичних та експериментальних досліджень, в зв’язку з тим, що вони широко застосовуються як конструктивні елементи в різних галузях промисловості. При заповненні оболонки рідиною змінюються її динамічні властивості, тому дослідження коливання рідини є актуальною проблемою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Зауважимо, що математичне формулювання задачі динаміки системи «резервуар–рідина», з вільною поверхнею в випадку нерухомого резервуара, є крайовою задачею Неймана для рівняння Лапласа, з двома граничними умовами на вільній поверхні рідини [1]. При горизонтальному положенні конструкції та її частковому заповненні порушується симетричність за окружною координатою, що створює потребу для використання більш складних просторових моделей [2–5]. Для числового розв’язання вказаних крайових задач використовують методи скінченних різниць [6], граничних та скінченних елементів [7, 8], а також методи скінченних об’ємів [9].

В роботі для розрахунку використовували метод граничних елементів, а також були розглянуті випадки впливу сейсмічного та імпульсного навантаження [10].

Мета дослідження

Розробити методику визначення частоти і форми плескання рідини в коаксіальних оболонках за допомогою методу граничних елементів. Розглянути вимушені коливання під дією горизонтальних гармонічних, імпульсних та сейсмічних навантаженнь.

Викладення основного матеріалу дослідження

Формулювання задачі та основні співвідношення

Розглядається система двох коаксіальних оболонок обертання при частковому заповненні рідиною (рис. 1).

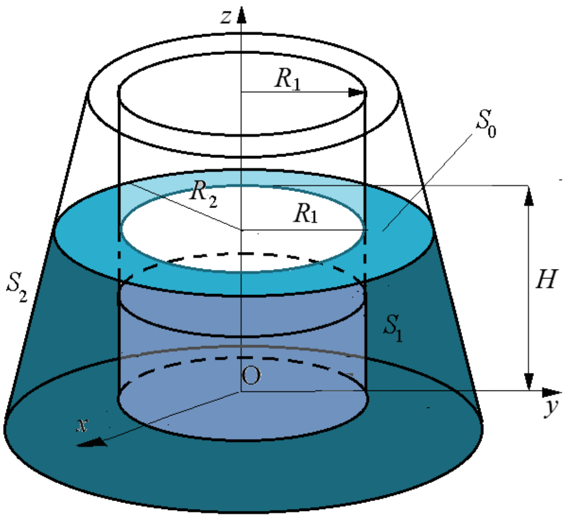


Рис. 1 Коаксіальні оболонки, частково заповнені рідиною.

Оболонки вважаються жорсткими. Рідина, що заповнює оболонки, є ідеальною та нестисливою. Якщо рух рідини починається із стану спокою, тоді згідно з теоремою Томпсона, рух рідини є потенціальним, оскільки він був потенціальним в початковий

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.9

момент часу. В цих умовах існує потенціал швидкостей $\varphi(x, y, z, t)$, що задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

На жорстких поверхнях оболонок виконується умова непротікання:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \qquad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_2} = 0. \tag{2}$$

На вільній поверхні мають виконуватись кінематична та динамічна граничні умови. Кінематична умова полягає в тому, що точки рідини, які знаходились на вільній поверхні в початковий момент часу, залишаються на цій поверхні протягом всього часу руху. Ця умова має вигляд:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \tag{3}$$

де функція ζ описує зміну положення та форми вільної поверхні за часом.

Динамічна умова є умовою рівності тиску рідини атмосферному тиску на поверхні рідини і описується таким рівнянням:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\zeta = 0, \tag{4}$$

де g є прискоренням вільного падіння.

Для однозначного розв’язання ставимо додаткову умови у вигляді:

$$\int_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS = 0. \tag{5}$$

Співвідношення (1)–(5) складають спектральну задачу для оболонкових конструкцій з рідиною [11–12].

В роботі [13] за допомогою методу граничних елементів в осесиметрічному формулюванні [14] отримані форми та частоти вільних коливань системи (оболонка–рідина, тобто розв’язано спектральну задачу (1)–(5). Ці форми будемо надалі використовувати, як базисну систему для задачі на вимушені коливання.

Будемо шукати потенціал швидкостей φ та функцію ζ у вигляді рядів:

$$\varphi(r, z, t, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}(t)\, \varphi_k(r, \theta, z), \tag{6}$$

$$\zeta(r, t, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}}. \tag{7}$$

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.9

Тут функції φ_k є розв'язками таких крайових задач:

$$\Delta\varphi_k = 0, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_k}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_1} = \left.\frac{\partial\varphi_k}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_2} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}(r,\theta,z) = \left.\frac{\omega_k^2}{g}\varphi(r,z,\theta)\right|_{S_0}. \tag{10}$$

Тобто φ_k та ω_k є формами і частотами вільних коливань рідини в системі коаксіальних оболонок. Числові методи розв'язання крайових задач (7)–(9) на основі використання інтегральних зображень та прямого формулювання методу граничних елементів розроблені в [14, 15].

Визначення форми вільної поверхні

Розглянемо вимушені коливання рідини в системі коаксіальних оболонок під дією горизонтального навантаження. Згідно з [11, 16] має місце така динамічна умова на вільній поверхні рідини:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a_x(t)x + g\zeta = 0. \tag{11}$$

Тут g – прискорення вільного падіння, $\mathbf{a}_x = \nabla[x \cdot a_x(t)]$ є горизонтальним прискоренням, що зумовлено дією зовнішніх сил. Зауважимо, що форми коливань рідини є ортогональними функціями [17]. У випадку горизонтального навантаження реалізуються лише неосесиметрічні форми коливань, що відповідають першій гармоніці: $\alpha = 1$ [11].

Підставимо ряди (6)–(7), які відповідають формам коливань при $\alpha = 1$ та вираз (12) в крайову умову (11). Отримаємо, враховуючи, що $x = r\cos\theta$, таке співвідношення:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ddot{c}(t)\,\varphi_k(r,\theta,H) + g\sum_{k=1}^{\infty}c(t)\frac{\partial\varphi_k(r,\theta,H)}{\partial z} + ra_x(t) = 0.$$

Згідно з умовою (10) знайдемо:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ddot{c}(t)\,\varphi_k(r,\theta,H) + \sum_{k=1}^{\infty}c(t)\,\omega_k^2\varphi_k(r,\theta,H) + ra_x(t) = 0. \tag{13}$$

Далі знаходимо скалярний добуток співвідношень (13) на базисні функції φ_l. Внаслідок ортогональності [17] будемо мати незв'язану систему диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\ddot{c}_k(t) + \omega_k^2 c_k(t) + a_x(t)(r,\varphi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

де скалярний добуток (r,φ_k) визначається за формулою:

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.9

$$\left(r,\varphi_k\right)=\iint\limits_{S_0} r\varphi_k\left(r,\theta,H\right)dS .$$

Задача полягає у визначенні невідомих коефіцієнтів, залежних від часу, та побудови форми вільної поверхні за умови дії гармонічних, імпульсних та сейсмічних навантажень.

У випадку гармонічного навантаження маємо:

$$a_x\left(t\right)=a_0\cos\omega_0 t\ , \tag{15}$$

де a_0,ω_0 є відповідно амплітудою та частотою сили, що змушує.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів $c_k(t)$ потрібно задати початкові умови. Оскільки за припущенням система «оболонка–рідина» в початковий момент знаходилась у стані спокою, тому

$$c_k\left(0\right)=0,\quad \dot{c}_k\left(0\right)=0,\quad k=1,2,... \tag{16}$$

Позначимо $A_k=a_0\left(r,\varphi_k\right)$. Згідно з умовами (16) невідомі коефіцієнти мають вигляд:

$$c_k\left(t\right)=\frac{A_k}{\omega_k^2-\omega_0^2}\left(\cos\omega_0 t-\cos\omega_k t\right).$$

Якщо діє імпульсне навантаження:

$$a_x\left(t\right)= \,=a_0 a(t),\qquad a\left(t\right)=\begin{cases}1, & t<T,\\ 0, & t\ge T,\end{cases} \tag{17}$$

де час T є періодом дії імпульсного навантаження,

згідно з [18] отримано такий розв’язок рівнянь (14):

$$c_k(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega_k^2}-\dfrac{1}{\omega_k^2}\cos(\omega_k t), & 0\le t\le T,\\ \dfrac{1}{\omega_k^2}-\dfrac{1}{\omega_k^2}\cos(\omega_k t)-\dfrac{1}{\omega_k^2}+\dfrac{1}{\omega_k^2}\cos\omega_k(t-T), & t>T.\end{cases}$$

Нехай сейсмічне навантаження моделюється таким чином [18]:

$$a_x\left(t\right)=\begin{cases}a_0\sin\left(12\pi t/5\right)\cos\left(2\pi t\right), & t<T,\\ 0, & t\ge T,\end{cases} \tag{18}$$

Позначимо $\Omega_1=\dfrac{12}{5}\pi,\quad \Omega_2=\dfrac{9}{5}\pi.$ Отримаємо при $t<T$

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.9

$$c_k(t) = -\frac{A_k}{\Omega_1^2 - \omega_k^2}\left[\frac{\Omega_1 \sin(\omega_k t)}{\omega_k} - \sin(\Omega_1 t)\right] + \frac{A_k}{\Omega_2^2 - \omega_k^2}\left[\frac{\Omega_2 \sin(\omega_k t)}{\omega_k} - \sin(\Omega_2 t)\right],$$

а при $t > T$

$$c_k(t) = -\frac{A_k}{\Omega_1^2 - \omega_k^2}\left[\frac{\Omega_1 \sin(\omega_k (t-T))}{\omega_k} - \sin(\Omega_1 (t-T))\right] +$$

$$+\frac{A_k}{\Omega_2^2 - \omega_k^2}\left[\frac{\Omega_2 \sin(\omega_k (t-T))}{\omega_k} - \sin(\Omega_2 (t-T))\right].$$

Таким чином, отримані коефіцієнти рядів для функцій φ та ζ. Це дає змогу дослідити зміну рівня підйому вільної поверхні за часом.

Аналіз числових результатів

Досліджені коливання рідини в системі циліндричних оболонок під дією зовнішніх навантажень. Вважалось, що $R_2 = 1$ м, $H = 1$ м (рис. 1). Також вважалося, що у всіх розглянутих випадках рух рідини починався із стану спокою.

Зауважимо, що розглядались форми коливань, які відповідають $\alpha = 1$, [9].

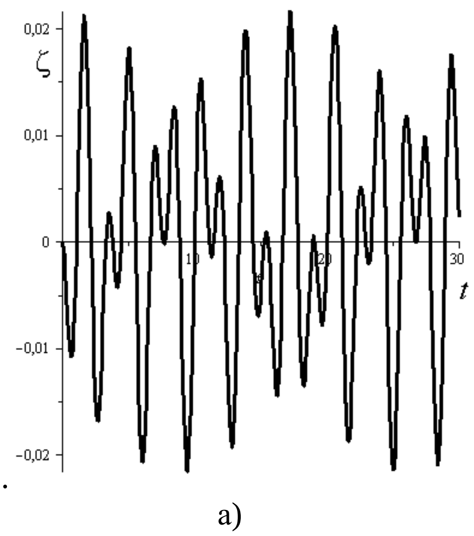
В табл. 1 наведені найнижчі частоти вільних коливань рідини при різних співвідношеннях радіусів оболонок R_1 / R_2 (рис. 1).

Таблиця 1

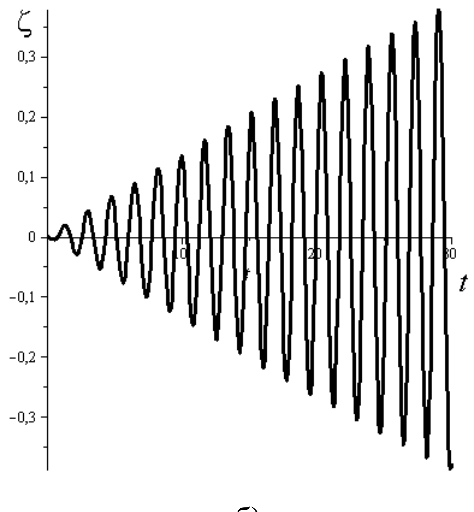
Частоти коливань рідини в коаксіальних оболонках, $\alpha = 1$

R_1/R_2	0.0	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9
ω	4.247	4.247	4.204	4.086	3.937	3.785	3.641	3.516	3.403	3.212

На рис. 2 зображено поведінку вільної поверхні рідини в точці з такими циліндричними координатами: $r = 1$, $\theta = 0$, $z = 1$ під дією гармонічного навантаження (15) для оболонкової системи при $R_1 / R_2 = 0.5$.



а)



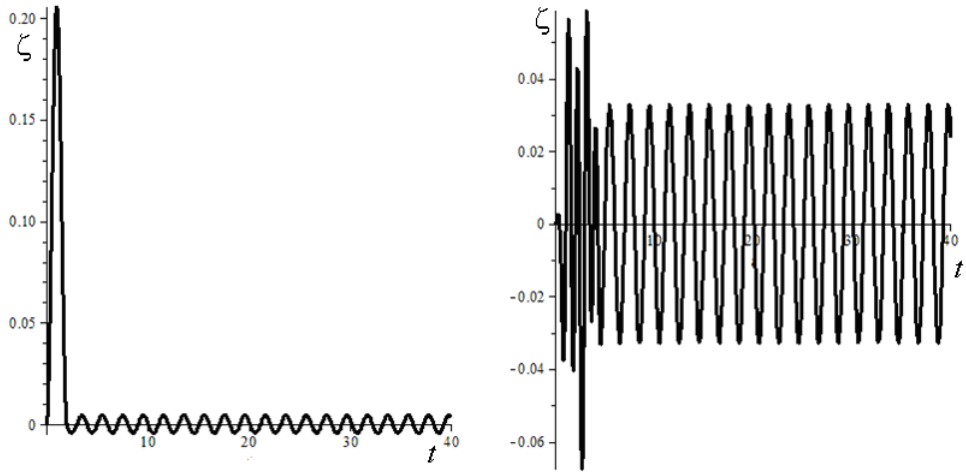
б)

Рис.2. Зміна вільної поверхні за часом під дією гармонічного навантаження.

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.9

Рис. 2а) та 2б) відповідають гармонічним навантаженням з параметрами $a_0 = 0.1$, $\omega_0 = 2$ та $a_0 = 0.1$, $\omega_0 = 3.64$ відповідно.

На рис.3 зображено зміну за часом вільної поверхні за умови дії імпульсного (рис. 3а) та сейсмічного навантаження (рис. 3б).



а) б)

Рис. 3. Зміна вільної поверхні за часом під дією імпульсного та сейсмічного навантаження.

Параметри імпульсного навантаження $T = 2$, $a_0 = 2$. При сейсмічному навантаженні також вважалось, що $a_0 = 2$.

При дії гармонічного навантаження, якщо частота зовнішньої сили відрізняється від частоти вільних коливань, відбувається періодичний рух вільної поверхні з обмеженими амплітудами.

Висновки

За допомогою методу граничних елементів розроблено методику, що дає можливість визначити частоти і форми плескання рідини в коаксіальних оболонках. Потенціал швидкостей та функція, що описує форму вільної поверхні, зображені у вигляді рядів за формами вільних коливань рідини в коаксіальних оболонках. Ці форми отримано методом граничних елементів в аксіально-симетричному формулюванні. Розглянуто вимушені коливання під дією горизонтальних гармонічних, імпульсних та сейсмічних навантаження.

Список використаної літератури

1. Лимарченко О. С. Нелинейные задачи динамики жидкости в резервуарах нецилиндрической формы. Киев: Адверта, 2017. 130 с.
2. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Numerical modeling of spatial vibrations of cylindrical shells, partially filled with fluid. *Computational Technologies*. 2013. Vol. 18. № 2. P. 12–24.
3. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural Vibrations and Stability of Elliptical Cylindrical Shells Containing Fluid. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2016. Vol. 16. № 10. DOI: 10.1142/S0219455415500765
4. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid. *Thin-Walled Structures*. 2015. Vol. 90. P. 12–22.
5. Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Сенин А. Н. Анализ пространственных колебаний коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2018. Т. 11. № 4. С. 448–462.

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.9

6. Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації динамічних систем. Вінниця : ВНТУ, 2010. 260 с.
7. Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers. *International Journal of Engineering and Advanced Research Technology*. 2015. Vol. 1. № 1. P. 45–50.
8. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики. *Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика*. 2002. Вип. 5. С. 95–106.
9. Погрибный В. Б., Стрельникова Е. А., Шувалова Ю. С. Численное решение уравнений Навье-Стокса методом конечных объемов на структурированной сетке с гибкими границами. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2014. № 3(50). С.413–417.
10. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced Vibrations of Tanks Partially Filled with the Liquid Under Seismic Load. Proceedings of the *Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods*: *XXXIII International Conference* (UK, New Forest, 28-30 June, 2011). 2011. Vol. 52: WIT, Transactions on Modelling and Simulation. P. 285–296.
11. Ibrahim R. A. Liquid Sloshing Dynamics. Theory and Applications. Cambrige: Cambrige University Press, 2005. 972 p.
12. Клигман Е. П., Клигман И. Е., Матвеенко В. П. Спектральная задача для оболочек с жидкостью. *Прикладная механика и техническая физика*. 2005. Т. 46. № 6. С. 128–135.
13. Науменко Ю. В., Розова Л. В., Стрельникова Е. А., Усатова О. А. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах колебаний жидкости в коаксиальных оболочках. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2019. Вип. 41. С. 65–72.
14. Gnitko V., Naumemko Y., Strelnikova E. Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 22. Issue 4. P. 867–881.
15. Еселева Е. В., Гнитько В. И., Стрельникова Е. А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Проблемы машиностроения*. 2006. №1. С. 105–118.
16. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Degtyarev K. Boundary Element Method in Nonlinear Sloshing Analysis for Shells of Revolution under Longitudinal Excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements.* 2020. Vol. 111. P. 78–87. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008.
17. Gavrilyuk I., Lukovsky I., Trotsenko Yu., Timokha A. Sloshing in a Vertical Circular Cylindrical Tank with an Annular Baffle. Part 1. Linear Fundamental Solutions. *Journal of Engineering Mathematics*. 2006. Vol. 54. P. 71–88.
18. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science*. 2019. Vol. 5. P. 31–41.

References

1. Limarchenko, O. S. (2017). Nelineynyie zadachi dinamiki zhidkosti v rezervuarah netsilindricheskoy formyi. Kiev: Adverta.
2. Bochkarev, S. A., Lekomtsev, S. V., & Matveenko V. P. (2013). Numerical modeling of spatial vibrations of cylindrical shells, partially filled with fluid. *Computational Technologies*. **18**, 2, 12–24.
3. Bochkarev, S. A., Lekomtsev, S. V., & Matveenko, V. P. (2016). Natural Vibrations and Stability of Elliptical Cylindrical Shells Containing Fluid. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. **16**, 10. DOI: 10.1142/S0219455415500765

4. Bochkarev, S. A., Lekomtsev, S. V., & Matveenko, V. P. (2015). Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid. *Thin-Walled Structures*. **90**, 12–22.
5. Bochkaryov, S. A., Lekomtsev, S. V., & Senin, A. N. (2018). Analiz prostranstvennyih kolebaniy koaksialnyih tsilindricheskih obolochek, chastichno zapolnennyih zhidkostyu. *Vyichislitelnaya mehanika sploshnyih sred*. **11**, 4, 448–462.
6. Mokin, B. I., Mokin, V. B., & Mokin, O. B. (2010). Matematychni metody identyfikatsii dynamichnykh system. Vinnytsia: VNTU.
7. Medvedovskaya, T., Strelnikova, E., & Medvedyeva, K. (2015). Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers. *International Journal of Engineering and Advanced Research Technology*. **1**, 1, 45–50.
8. Kvasnytsia, H., & Shynkarenko, H. (2002). Adaptyvni aproksymatsii metodu skinchennykh elementiv dlia zadach elastostatyky. *Visnyk Lvivskoho universytetu. Seriia: Prykladna matematyka ta informatyka*. **5**, 95–106.
9. Pogribnyiy, V. B., Strelnikova, E. A., & Shuvalova, Yu. S. (2014). Chislennoe reshenie uravneniy Nave-Stoksa metodom konechnyih ob'emov na strukturirovannoy setke s gibkimi granitsami. *Vestnik Hersonskogo natsionalnogo tehnicheskogo universiteta*. **3**(50), 413–417.
10. Gnitko, V., Marchenko, U., Naumenko, V., & Strelnikova, E. (2011). Forced Vibrations of Tanks Partially Filled with the Liquid Under Seismic Load. Proceedings of the *Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods*: XXXIII International Conference (UK, New Forest, 28-30 June, 2011). Vol. 52: WIT, Transactions on Modelling and Simulation, pp. 285–296.
11. Ibrahim, R. A. (2005). Liquid Sloshing Dynamics. Theory and Applications. Cambrige: Cambrige University Press.
12. Kligman, E. P., Kligman, I. E., & Matveenko, V. P. (2005). Spektralnaya zadacha dlya obolochek s zhidkostyu. *Prikladnaya mehanika i tehnicheskaya fizika*. **46**, 6, 128–135.
13. Naumenko, Yu. V., Rozova, L. V., Strelnikova, E. A., & Usatova, O. A. (2019) Metod singulyarnyih integralnyih uravneniy v zadachah kolebaniy zhidkosti v koaksialnyih obolochkah. *Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetu imeni V. N. Karazina. Seriia: Matematychne modeliuvannia. Informatsiini tekhnolohii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia*. **41**, 65–72.
14. Gnitko, V., Naumemko, Y., & Strelnikova, E. (2017). Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. **22**, 4, 867–881.
15. Eseleva, E. V., Gnitko, V. I., & Strelnikova, E. A. (2006). Sobstvennyie kolebaniya sosudov vyisokogo davleniya pri vzaimodeystvii s zhidkostyu. *Problemyi mashinostroeniya*. **1**, 105–118.
16. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., & Degtyarev, K. (2020). Boundary Element Method in Nonlinear Sloshing Analysis for Shells of Revolution under Longitudinal Excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. **111**, 78–87. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008.
17. Gavrilyuk, I., Lukovsky, I., Trotsenko, Yu., Timokha, A. (2006). Sloshing in a Vertical Circular Cylindrical Tank with an Annular Baffle. Part 1. Linear Fundamental Solutions. *Journal of Engineering Mathematics*. **54**, 71–88.
18. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., & Gnitko, V. (2019). Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science*. **5**, 31–41.

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.9