

УДК 519.65

А.Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могили
О.І ЛИТВИНЕНКО, І.О. АСТІОНЕНКО
Херсонський національний технічний університет

«ДУТА» МОДА ЯК КОГНІТИВНА МОДЕЛЬ ПОБУДОВИ ТРИКУТНИКА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Трикутники відіграють надзвичайно важливу роль в методі скінченних елементів (МСЕ). Робота присвячена дослідженню маловідомих властивостей «дутої» моди – внутрішньої функції десятипараметричного базису поліноміальної інтерполяції трикутного скінченного елемента.

«Дуті» моди – це моди, які мають відмінні від нуля амплітуди всередині елемента і амплітуди, що дорівнюють нулю на його сторонах. У методі скінченних елементів внутрішні вузли є небажаними, тому їх виключають разом із відповідними функціями форми. Перший метод виключення наведений у монографії Р. Галлагера і полягає у процедурі конденсації стосовно матриці жорсткості елемента. Другий метод – це безпосередня модифікація функцій форми таким чином, щоб виключити степені вільності, пов'язані з внутрішніми вузлами. Е. Мітчелл наводить приклади виключення внутрішніх вузлів на комплексах і мультиплексах.

На трикутному елементі третього порядку десятий вузол в баріцентрі усувають, як правило, за «рецептом» Сьярле-Равьяра. В результаті конденсації (редукції) «дута» мода лишається поза увагою дослідників і не використовується в практичних розрахунках. Ми розглядаємо «дуту» моду як самостійну математичну модель і шляхом когнітивно-графічного аналізу виявляємо маловідомі особливості формоутворення поверхні і корисні аналогії. Доведено існування зв'язків «дутої» моди з поліномами Ерміта-Кунса, квадратурами Гаусса (версія Бернуллі та версія Лежандра), задачею Прандтля про кручення призматичних стержнів.

У даній роботі внутрішня мода трикутного скінченного елемента третього порядку, як і решта функцій базису, вперше використовувалась для реалізації поліноміальної інтерполяції функцій двох аргументів в умовах гіпотези Лагранжа. Когнітивно-графічний аналіз поверхні «дутої» моди дозволив більш глибоко проаналізувати всі властивості цієї моделі і відкрив потенціал для створення нових базисів і оптимізації існуючих. Ми маємо чергове підтвердження відомого факту: математика завжди дає більше, ніж від неї очікують. Немає сумніву, що «дута» мода – це яскравий приклад когнітивної моделі.

Ключові слова: скінченний елемент третього порядку, «дута» мода, метод перерізів поверхні, когнітивно-графічний аналіз, поліноми Ерміта-Кунса, квадратури Гаусса, задача Прандтля про кручення стержнів.

А.Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могили
Е.И. ЛИТВИНЕНКО, И.А. АСТИОНЕНКО
Херсонский национальный технический университет

«ДУТАЯ» МОДА КАК КОГНИТИВНАЯ МОДЕЛЬ ПОСТРОЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКА

Треугольники играют чрезвычайно важную роль в методе конечных элементов (МКЭ). Работа посвящена исследованию малоизвестных свойств «дутой» моды – внутренней функции десятипараметрического базиса полиномиальной интерполяции треугольного конечного элемента.

«Дутые» моды – это моды, которые имеют отличные от нуля амплитуды внутри элемента и амплитуды, которые равны нулю на его сторонах. В методе конечных элементов внутренние узлы нежелательны, поэтому их исключают вместе с соответствующими функциями формы. Первый метод исключения приведен в монографии Р. Галлагера и состоит в процедуре конденсации относительно матрицы жесткости элемента. Второй метод – это непосредственная модификация функций формы таким образом, чтобы исключить степени свободы, связанные с внутренними узлами. Э. Митчелл приводит примеры исключения внутренних узлов на комплексах и мультиплексах.

На треугольном элементе третьего порядка десятый узел в барицентре исключают, как правило, по «рецепту» Сьярле-Равьяра. В результате конденсации (редукции) «дутая» мода остается без внимания исследователей и не используется в практических расчетах. Мы рассматриваем «дутую» моду как самостоятельную математическую модель и путем когнитивно-графического анализа обнаруживаем малоизвестные особенности формообразования поверхности и полезные аналогии. Доказано существования связей «дутой» моды с полиномами Эрмита-Кунса, квадратурами Гаусса (версия Бернулли и версия Лежандра), задачей Прандтля о кручении призматических стержней.

В данной работе внутренняя мода треугольного конечного элемента третьего порядка, как и другие функции базиса, впервые использовалась для реализации полиномиальной интерполяции функций двух аргументов в условиях гипотезы Лагранжа. Когнитивно-графический анализ поверхности «дутой» моды позволил более глубоко проанализировать все свойства этой модели и открыл потенциал для создания новых базисов и оптимизации существующих. Мы имеем очередное подтверждение известного факта: математика всегда дает больше, чем от неё ожидают. Нет сомнения, что «дутая» мода – это яркий пример когнитивной модели.

Ключевые слова: конечный элемент третьего порядка, «дутая» мода, метод сечений поверхности, когнитивно-графический анализ, полиномы Эрмита-Кунса, квадратуры Гаусса, задача Прандтля о кручении стержней.

A.N. KHOMCHENKO
Petro Mohyla Black Sea National University
O.I. LYTUVYENKO, I.O. ASTIONENKO
Kherson National Technical University

'BLOWN' MODE AS COGNITIVE MODEL OF BUILDING THE TRIANGLE OF THIRD ORDER

Triangles play an extremely important role in the finite element method (FEM). The work is devoted to the investigation of the little-known properties of the 'blown' mode – the internal function of the ten-parameter basis of the polynomial interpolation of a triangular finite element.

'Blown' modes are modes that have non-zero amplitudes inside the element and amplitudes equal to zero on its sides. The internal nodes are undesirable in the finite element method, so they are excluded along with the respective shape functions. The first method of exclusion is given in R. Gallagher's monograph and involves the condensation procedure with respect to the stiffness matrix of the element. The second method is to directly modify the functions of the form in such a way as to eliminate the degrees of freedom associated with the internal nodes. E. Mitchell gives examples of excluding internal nodes on complexes and multiplexes.

On the triangular element of the third order the tenth node in the barycenter is eliminated, as a rule, according to the 'recipe' of Ciarlet Raviart. As a result of condensation (reduction) the 'blown' mode remains unaddressed by researchers and is not used in practical calculations. We consider 'blown' mode as an independent mathematical model and by cognitive-graphical analysis we discover little-known features of surface formation and useful analogies. The existence of links of the 'blown' mode with Hermite-Koons polynomials, Gauss quadratures (Bernoulli's version and Legendre's version), and Prandtl's problem of prismatic rods torsion is proved.

In this work the internal mode of a triangular finite element of the third order, like the rest of the basis functions, was first used to realize the polynomial interpolation of the functions of two arguments under the conditions of the Lagrange hypothesis. Cognitive-graphical analysis of the surface of the 'blown' mode allowed to analyze more deeply all the properties of this model and opened the potential to create new bases and optimize existing ones. We have another confirmation of the well-known fact: mathematics always gives more than expected. There is no doubt that 'blown' mode is a bright example of a cognitive model.

Keywords: finite element of the third order, 'blown' mode, method of surface cuttings, cognitive-graphical analysis, Hermite-Koons polynomials, Gauss quadratures, Prandtl's problem of rods torsion.

Постановка проблеми

Трикутники відіграють надзвичайно важливу роль в методі скінченних елементів (МСЕ). Достатньо згадати трикутник Куранта (1943) і комірку Куранта із шести трикутників. Цікаво, що трикутні СЕ мають тісний зв'язок із трикутними числами Піфагора. Через 25 століть сучасний МСЕ успішно використовує трикутні СЕ першого порядку – симплекси (три вузли у вершинах), другого порядку (шість вузлів: три у вершинах і три на середині сторін), третього порядку (десять вузлів: дев'ять вузлів рівномірно розташовані по периметру, включаючи вершини, десятий вузол в барицентрі трикутника).

Привертає увагу поява внутрішнього вузла. До речі, внутрішній вузол виникає не тільки в процедурах інтерполяції за Лагранжем (усі вузли прості), але і в моделях Ерміта-Кунса (з кратними вузлами у вершинах). Проблема небажаних внутрішніх вузлів виникає і на квадратних СЕ [17]. Саме тому з'явилися процедури конденсації (редукції), які разом із внутрішнім вузлом усувають і відповідну базисну функцію. Таким чином, функція впливу («дута» мода), що асоціюється з барицентром СЕ, лишається поза увагою дослідників. Це проблема, тому що оригінальний рельєф таких поверхонь часто приховує цікаву інформацію, яка виходить за рамки класичної задачі відновлення функції двох аргументів. Це буде проілюстровано на прикладі «дутої» моди трикутного СЕ третього порядку.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Ми розглядаємо десятку базисну функцію трикутника третього порядку («дуту» моду) як самостійну математичну модель, як приклад формоутворення поверхні, що нагадує мильну плівку на трикутному контурі. Немає сумніву, що «дута» мода – це яскравий приклад когнітивної моделі, але з цієї точки зору вона ще не розглядалася, принаймні в МСЕ. Зрозуміло, що наші посилання будуть обмежені джерелами, в яких йдеться взагалі про трикутні СЕ, зокрема, про трикутник третього порядку. Поліноми третього порядку, зазвичай, будують на основі певної інтерполяційної гіпотези, яка впливає на кількість вузлів СЕ. Практичне застосування трикутників в задачах відновлення функцій починалося з лагранжевих моделей (десять параметрів полінома і десять вузлів). Інформацію про такі СЕ можна знайти в [1–6]. В задачах згину пластин поширені ермітові моделі (параметрів – десять, вузлів – чотири: три вузла в вершинах і

один в барицентрі). Ці моделі використовують не тільки значення функції у вузлах, але і значення перших похідних по x та y (тільки у кутах). Про ермітові трикутники можна прочитати в [6–11]. Важливо, що локальна степінь вільності («дута» мода) має місце в обох випадках. Ця функція необхідна для створення базису десятипараметричної інтерполяції. Але після цього десяту функцію усувають, наприклад, за «рецептом» конденсації Сьярле-Равьяра [2]. В нашій роботі ми шукаємо побічні корисні властивості «дутої» моди, усуваючи решту базисних функцій трикутника. Когнітивно-графічний аналіз «дутої» моди виконується вперше.

Мета дослідження

Мета дослідження – побудувати геометрично базисну функцію («дута» моду) трикутного скінченного елемента третього порядку. Шляхом когнітивно-графічного аналізу встановити цікаві і корисні властивості поверхні, які виявляють додаткові характеристики адекватності моделі.

Викладення основного матеріалу дослідження

Не порушуючи загальності, будемо розглядати правильний трикутник. Ця модель дуже зручна і корисна в процедурах паркетування, в задачах чистого кручення призматичних стержнів. У МСЕ саме правильний трикутник забезпечує мінімальну похибку в розрахунках [9, 10]. На рис. 1 в системі прямокутних координат Ox зображено трикутник, вписаний в коло $R = 1$.

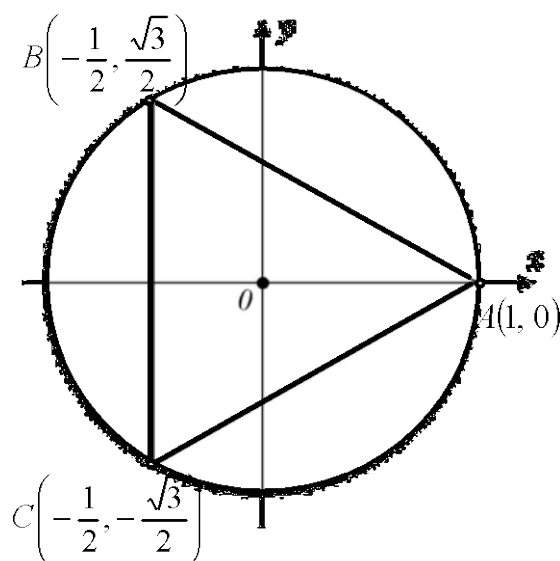


Рис. 1. Трикутний СЕ з внутрішнім вузлом в барицентрі $(0; 0)$.

У центрі нашої уваги десятий вузол в барицентрі трикутника $(0; 0)$. Інші дев'ять вузлів (вони не розглядаються) розташовані рівномірно (включаючи вершини) на границі СЕ. Традиційно побудова базису СЕ передбачає складання та розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь з матрицею 10×10 . Якщо нам потрібна лише одна функція (внутрішня мода), її можна сконструювати геометрично. Це нагадує метод Уачспреса [12] (product of planes). Головне – не порушувати умови інтерполяційної гіпотези Лагранжа: «дута» мода дорівнює 1 в барицентрі і 0 – на границі трикутника (тобто в будь-якому іншому вузлі). Запишемо рівняння сторін СЕ:

$$(AB): -x - \sqrt{3}y + 1 = 0; \quad (BC): 2x + 1 = 0; \quad (AC): -x + \sqrt{3}y + 1 = 0.$$

Поверхня, що проходить через точку $(0; 0; 1)$ і «захоплює» контур трикутника, моделюється прямим перемноженням рівнянь трьох площин (граней піраміди):

$$f(x, y) = 1 + 2x(x^2 - 3y^2) - 3(x^2 + y^2). \quad (1)$$

В барицентричних координатах Мьобіуса ця поверхня виглядає так [1–3]:

$$N_0(x, y) = 27L_1 \cdot L_2 \cdot L_3,$$

де $L_i(x, y)$ – барицентричні координати симплекса.

До речі, якщо скористатися зв'язком між барицентричними і декартовими координатами, можна після деяких перетворень отримати рівняння (1). Зацікавлений читач може самостійно побудувати 3D-зображення поверхні $f(x, y)$, щоб зрозуміти, чому Галлагер [11] називає її «дутою». Можна дізнатися більше про те, що приховує рівняння (1). Для цього ми скористалися відомим методом перерізів. На рис. 2.а зображено переріз поверхні (1) площиною $y = 0$. Неважко впізнати кубічний поліном Кунса [13, 14, 15, 16]:

$$f(x, 0) = 1 + 2x^3 - 3x^2, \quad (2)$$

який досліджував ще Ерміт, а до нього Чебишев. Кунс успішно використовує фрагмент кривої на канонічному відрізку $[0; 1]$ і, головне, розповсюджує ідеї попередників на інтерполяцію функцій двох аргументів. Якщо уважно придивитися до кубічної параболи Чебишева-Ерміта-Кунса, з'явиться можливість додати ще Лагранжа, Бернуллі і Гауса. Теорема Лагранжа про середнє значення функції, яка диференційована на відрізку $[0; 1]$ має вигляд:

$$\frac{f(1; 0) - f(0; 0)}{+1} = f'(c; 0),$$

або $6c^2 - 6c = -1$, звідки $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ і $c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$.

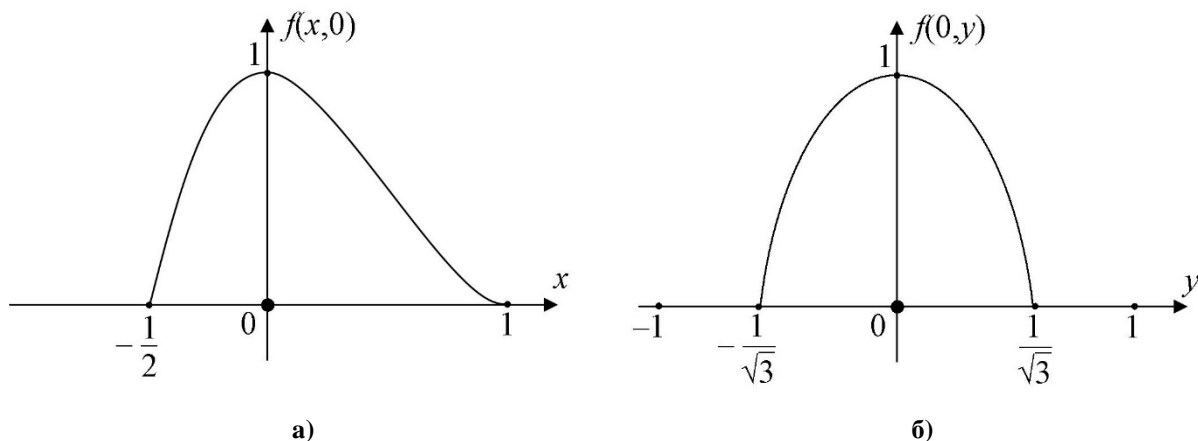


Рис. 2. а) переріз поверхні $f(x, y)$ площиною $y=0$; б) переріз поверхні $f(x, y)$ площиною $x=0$.

Точки c_1, c_2 – нулі полінома Бернуллі другого порядку – використовують як вузли інтегрування квадратурної формули Гаусса:

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \approx \frac{1}{2}(\varphi(c_1) + \varphi(c_2)).$$

На рис. 2.6 зображено переріз поверхні (1) площиною $x=0$. Це квадратична парабола:

$$f(0; y) = 1 - 3y^2.$$

У цьому випадку ми отримуємо дві відомі точки: $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ – нулі полінома Лежандра другого порядку, які використовують як вузли інтегрування квадратури Гаусса на $[-1; 1]$:

$$\int_{-1}^1 \varphi(y) dy \approx \varphi(c_1) + \varphi(c_2).$$

Читач, знайомий з мембранною аналогією Прандтля [1], помітив, що функція (1) нагадує поверхню напруження в теорії кручення стержнів некругового перерізу. Функція напруження Прандтля задовольняє рівнянню Пуассона зі спеціальною правою частиною:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2. \quad (3)$$

При нульових значеннях функції на границі:

$$F(x, y)|_r = 0. \quad (4)$$

Для «дутої» моди умова (4) виконується за означенням. Тепер її зовсім просто зробити розв'язком рівняння Пуассона, якщо «стиснути» поверхню (1) вздовж Oz із коефіцієнтом $\frac{1}{6}$. Таким чином, функція напруження Прандтля для стержня з трикутним перерізом має вигляд:

$$F(x, y) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x(x^2 - 3y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \quad (5)$$

Існує ймовірнісна інтерпретація функції Прандтля, яку відкрив у 1953 р. математик із США Дж. Дуб.

Висновки

Внутрішня мода трикутного скінченного елемента третього порядку, як і решта функцій базису, створювалася для реалізації поліноміальної інтерполяції функцій двох аргументів в умовах гіпотези Лагранжа. З цієї точки зору усі десять поліномів безумовно адекватні. Когнітивно-графічний аналіз поверхні «дутої» моди відкрив деякі

«таємниці» цієї моделі. Несподівані результати свідчать про існування надлишкового нереалізованого потенціалу адекватності. Ми маємо чергове підтвердження відомого факту: математика завжди дає більше, ніж від неї очікують. Цікаво проаналізувати «дуту» моду біквадратичного СЕ (дев'ять вузлів), але це тема наступної публікації.

Список використаної літератури

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
2. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981. 216 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
4. Норри Д. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304 с.
5. Немчинов Ю. И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов): монография. К.: Будівельник, 1980. 231 с.
6. Деклу Ж. Метод конечных элементов: монография. М.: Мир, 1976. 95 с.
7. Стренг Г. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 350 с.
8. Александров А. В., Лащеников Б. Я., Шапошников Н. Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы: монография. М.: Стройиздат, 1983. 488 с.
9. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений: монография. / Городецкий А.С., Заворицкий В.И., Лантух-Лященко А.И., Рассказов А.О. М.: Транспорт, 1981. 143 с.
10. Розин Л. А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам: монография. М.: Стройиздат, 1977. 132 с.
11. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
12. Wachspress E. I. A rational finite element basis. New York: Academic Press, 1975. 344 p.
13. Хомченко А. Н., Козуб Н. А. Интерполяция по Кунсу и геометрическая вероятность. *Проблеми інформаційних технологій*. 2009. Вип. 5. С. 145–148.
14. Астионенко И. А., Литвиненко Е. И., Хомченко А. Н. Когнитивно-графический анализ кривых Эрмита-Кунса 5-го порядка. *Системні технології*. 2016. Вип. 3 (104) С. 73–78.
15. Хомченко А. Н., Литвиненко О. І., Астіоненко І. О. Коноїди Ерміта-Кунса та їх властивості. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. Вип. 3 (66). Т.1. С.193–198.
16. Astionenko, I. O, Litvinenko, O. I., Osipova, N. V., Tuluchenko, G. Ya., & Khomchenko, A. N. (2016). Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. *AIP Conference Proceedings Report*. **1773**, 1, 040002-1 – 040002-11. DOI: 10.1063/1.4964965.
17. Хомченко А. Н., Литвиненко О. І., Астіоненко І. О. Фізично адекватна конденсація і мішані моделі серендипових елементів. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2019. Т. 2. № 1. С. 141–148. DOI: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-12>

References

1. Segerlind, L. (1979). Primenenie metoda konechnyih elementov. M.: Mir.
2. Mitchell, E. (1981). Metod konechnyih elementov dlya uravneniy s chastnyimi proizvodnyimi. M.: Mir.
3. Zenkevich, O. (1975). Metod konechnyih elementov v tehnikе. M.: Mir.
4. Norri D. (1981). Vvedenie v metod konechnyih elementov. M.: Mir.

5. Nemchinov, Yu. I. (1980). Raschet prostranstvennykh konstruktsiy (metod konechnykh elementov): monografiya. K.: BudIvelnik.
6. Deklu, Zh. (1976). Metod konechnykh elementov: monografiya. M.: Mir.
7. Streng, G. (1977). Teoriya metoda konechnykh elementov. M.: Mir.
8. Aleksandrov, A. V., Laschenikov, B. Ya., & Shaposhnikov, N. N. (1983). Stroitel'naya mehanika. Tonkostennyye prostranstvennyye sistemy: monografiya. M.: Stroyizdat.
9. Gorodetskiy, A. S., Zavoritskiy, V. I., Lantuh-Lyaschenko, A. I., & Rasskazov, A. O. (1981). Metod konechnykh elementov v proektirovanii transportnykh sooruzheniy: monografiya. M.: Transport.
10. Rozin, L. A. (1977). Metod konechnykh elementov v primeneni k uprugim sistemam: monografiya. M.: Stroyizdat.
11. Gallager, R. (1984). Metod konechnykh elementov. Osnovy. M.: Mir.
12. Wachspress, E. I. (1975). A rational finite element basis. New York: Academic Press.
13. Homchenko, A. N., & Kozub, N. A. (2009). Interpolyatsiya po Kunsu i geometricheskaya veroyatnost. *Problemi InformatsIynih tehnologIy*. **5**, 145–148.
14. Astionenko, I. A., Litvinenko, E. I., & Khomchenko, A. N. (2016). Kognitivno-graficheskyy analiz krivykh Ermita-Kunsa 5-go poryadka. *Systemni tehnologiyi*. **3** (104), 73–78.
15. Khomchenko, A. N., Lytvynenko, O. I., & Astionenko, I. O. (2018). Konoidy Ermita-Kunsa ta yikh vlastyvoli. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. **3**(66), 1, 193–198.
16. Astionenko, I. O., Litvinenko, O. I., Osipova, N. V., Tuluchenko, G. Ya., & Khomchenko, A. N. (2016). Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. AIP Conference Proceedings Report. **1773**, 1, 040002-1 – 040002-11. DOI: 10.1063/1.4964965.
17. Khomchenko A. N., Lytvynenko O. I., Astionenko I. O. (2019). Fizychno adekvatna kondensatsiia i mishani modeli serendypovykh elementiv. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*. **2**, 1, 141–148. DOI: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-12>