

УДК 519.857

А.Ю. АНДРЕЙЦЕВ, Ю.Э. ВЯЛА, А.В. ГЕЙЛИК, Т.С. КЛЕЦКАЯ, О.В. ЛЯШКО  
Государственный университет инфраструктуры и технологий

### **СРАВНЕНИЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ СТРАТЕГИЙ О ПОЭТАПНОЙ ЗАМЕНЕ ОБОРУДОВАНИЯ: СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ**

*В данной работе рассмотрены специальные случаи, возникающие при решении задачи о поэтапной замене оборудования, которым не было уделено внимание в работах, посвященных методам решения данной задачи. Она является продолжением исследования, проведенного в [8].*

*При решении поставленной задачи методом динамического программирования иногда возникает ситуация, когда в зоне замены находятся элементы, для которых более предпочтительно сохранение оборудования. Возможно несколько путей преодоления данной проблемы. Некоторые из них рассмотрены в [8].*

*Данное исследование предполагает расширение планового периода, что позволяет рассмотреть и сравнить альтернативные стратегии обновления.*

*Увеличение планового периода позволяет рассмотреть возможность сохранения оборудования большего возраста, если это приносит большую прибыль, чем его замена. С другой стороны, уменьшается степень доверия к показателям в последних интервалах этого периода, что связано с изменением конъюнктуры рынка и уменьшением достоверности долгосрочных прогнозов.*

*Применение различных способов устранения указанной выше проблемы продемонстрировано на абстрактном примере. Проведено сравнение различных стратегий обновления, основанное на анализе распределения прибыли по годам планового периода. Рассмотрено также распределение инвестиций по годам, что существенно влияет на выбор оптимальной стратегии обновления.*

*Акцентируется внимание на том, что лицо, принимающее решение, более склонно к выбору стратегий, приносящих большую прибыль в первые интервалы планового периода и требующих более равномерного распределения инвестиций.*

*Данный пример для простоты предполагает равномерное распределение оборудования по возрасту в начале планового периода. Однако, приведенные формулы для расчета прибылей и инвестиций являются универсальными и могут быть использованы в любых практических расчетах.*

*В заключение следует отметить, что наиболее эффективными, описанные подходы являются при выборе оптимальных стратегий обновления оборудования с небольшим сроком морального износа. При этом интервал (шаг) планового периода может быть равным не году, а кварталу или даже месяцу.*

*Ключевые слова: динамическое программирование, замена оборудования, стратегия, функция Беллмана, безусловная оптимизация.*

А.Ю. АНДРЕЙЦЕВ, Ю.Е. ВЯЛА, А.В. ГЕЙЛИК, Т.С. КЛЕЦКА, О.В. ЛЯШКО  
Державний університет інфраструктури та технологій

### **ПОРІВНЯННЯ АЛЬТЕРНАТИВНИХ СТРАТЕГІЙ ПОЕТАПНОЇ ЗАМІНИ ОБЛАДНАННЯ: СПЕЦІАЛЬНІ ВИПАДКИ**

*У даній роботі розглянуті спеціальні випадки, що виникають при розв'язанні задачі поетапної заміни обладнання, яким не приділено увагу в роботах, присвячених методам її розв'язання. Вона є продовженням дослідження, проведеного в [8].*

При розв'язанні поставленої задачі методом динамічного програмування іноді виникає ситуація, коли в зоні заміни знаходяться елементи, для яких більш доцільним є збереження обладнання. Можливі декілька шляхів подолання даної проблеми. Деякі з них розглянуті в [8].

Дане дослідження передбачає розширення планового періоду, що дозволяє розглянути і порівняти альтернативні стратегії оновлення.

Збільшення планового періоду дозволяє розглянути можливість збереження обладнання більшого віку, якщо це приносить більший прибуток, ніж його заміна. З іншого боку зменшується ступінь довіри до показників в останніх інтервалах цього періоду, що пов'язано зі зміною кон'юнктури ринку і зменшенням достовірності довгострокових прогнозів.

Застосування різних способів усунення зазначеної вище проблеми продемонстровано на абстрактному прикладі. Проведено порівняння різних стратегій оновлення, що базуються на аналізі розподілу прибутків по роках планового періоду. Розглянуто також розподіл інвестицій по роках, що істотно впливає на вибір оптимальної стратегії відновлення.

Акцентовано увагу на тому, що особа, яка приймає рішення, більш схильна до вибору стратегій, які приносять більший прибуток в початкові інтервали планового періоду і вимагають більш рівномірного розподілу інвестицій.

Даний приклад для простоти передбачає рівномірний розподіл обладнання за віком на початку планового періоду. Однак, наведені формули для розрахунку прибутків і інвестицій є універсальними і можуть бути використані в будь-яких практичних розрахунках.

На завершення слід зазначити, що найбільш ефективними, описані підходи є при виборі оптимальних стратегій оновлення обладнання з невеликим терміном морального зношування. При цьому інтервал (крок) планового періоду може дорівнювати не року, а кварталу або навіть місяцю.

Ключові слова: динамічне програмування, заміна обладнання, стратегія, функція Беллмана, безумовна оптимізація.

A.Yu. ANDREYTSSEV, Yu.E. VIALA, A.V. HEILYK, T.S. KLETSKA, O.V. LIASHKO  
State University of Infrastructure and Technologies

## COMPARISON OF ALTERNATIVE EQUIPMENT REPLACEMENT STRATEGIES: SPECIAL CASES

*In this paper, we consider special cases that arise when solving the problem of phased replacement of equipment, which were not paid attention to in the works devoted to methods for solving this problem. It is a continuation of the study conducted in [8].*

*When solving the problem by dynamic programming, sometimes a situation arises when there are elements in the replacement zone for which it is more preferable to keep the equipment. There are several ways to overcome this problem. Some of them are considered in [8].*

*This study involves an extension of the planning period, which allows us to consider and compare alternative update strategies.*

*The increase in the planning period allows us to consider the possibility of keeping equipment of a greater age, if it brings more profit than replacing it. On the other hand, the degree of confidence in the indicators in the last intervals of this period is reduced, which is associated with a change in market conditions and a decrease in the reliability of long-term forecasts.*

*The application of various methods to eliminate the above problem is demonstrated by an abstract example. A comparison of various update strategies based on an analysis of the distribution of profits by years of the planning period is carried out. The distribution of investments by year is also considered, which significantly affects the choice of the optimal update strategy.*

*Attention is focused on the fact that the decision-maker is more inclined to choose strategies that bring greater profit in the initial intervals of the planning period and require a more even distribution of investments.*

*For simplicity, this example assumes an even distribution of equipment by age at the beginning of the planning period. However, the formulas given for calculating profits and investments are universal and can be used in any practical calculations.*

*In conclusion, it should be noted that the most effective approaches described are in the selection of optimal equipment upgrade strategies with a short period of obsolescence. Moreover, the interval (step) of the planning period may not be equal to a year, but to a quarter of a year or a month.*

*Keywords: dynamic programming, equipment replacement, strategy, Bellman function, unconditional optimization.*

### **Постановка проблемы**

Функционирование любой производственной, в частности, транспортной и информационной системы связано с использованием оборудования, которое подвержено как физическому, так и моральному износу. Следовательно, периодически возникает вопрос о его обновлении. Поскольку в большинстве случаев единовременная замена всего оборудования требует больших материальных затрат, то актуальной становится задача выработки оптимальной стратегии поэтапной его замены. Критерием оптимальности в данном случае является прибыль, которая может быть получена в течении планового периода (промежутка времени, на которой разрабатывается стратегия обновления). Кроме того, в процессе выработки стратегии необходимо учитывать распределение инвестиций и прогнозирование изменений конъюнктуры рынка. Этим обусловлена актуальность рассмотрения методов решения задачи о поэтапном обновлении оборудования, а именно особых случаев, возникающих при применении существующих алгоритмов её решения.

### **Анализ последних исследований и публикаций**

Наиболее популярным и эффективным методом решения сформулированной задачи является метод динамического программирования, основанный на использовании принципа оптимальности Беллмана [1]. Алгоритмы применения данного метода детально описаны в [2–4]. В [5] рассмотрен пример, недостатком которого является предположение о том, что в начале планового периода обновляется всё оборудование. А это, напомним, требует больших вложений. И данная ситуация на практике возникает довольно редко. Влияние случайных факторов на адекватность модели рассмотрено в [6]. Безусловно, ведутся исследования по разработке программного обеспечения используемых алгоритмов (см., например, [2, 3, 7]. Рассмотрению специальных случаев, возникающих в процессе решения задачи об обновлении, посвящена работа [8].

### **Цель исследования**

В данной статье мы рассмотрим спектр способов возможного преодоления проблемы невозможности построения функции Беллмана, описанной в [8], проведём их

сравнение на абстрактном примере, а также рассмотрим вопрос о распределении инвестиций и прибыли по годам при применении каждой из стратегий.

### Изложение основного материала исследования

Пусть в нашем распоряжении имеется оборудование возраста от одного до  $n$  лет. В начале каждого года принимается решение о его сохранении либо замене. Необходимо разработать стратегию поэтапного обновления оборудования на ближайшие  $n$  лет, приносящую максимальную совокупную прибыль.

Уравнения Беллмана на последнем шаге имеют вид:

$$F_n(t) = \max \begin{cases} \Pr(t) & \text{сохранение} \\ \Pr(0) - p + S(t) & \text{замена} \end{cases},$$

а на каждом последующем –

$$F_k(t) = \max \begin{cases} \Pr(t) + F_{k+1}(t+1) & \text{сохранение} \\ \Pr(0) - p + F_{k+1}(1) + S(t) & \text{замена} \end{cases}.$$

Здесь  $t$  – возраст оборудования к началу определённого года;  $k$  – номер года в плановом периоде;  $\Pr(t)$  – прибыль от эксплуатации оборудования возраста  $t$ ;  $S(t)$  – остаточная стоимость оборудования соответствующего возраста;  $p$  – цена нового оборудования;  $F_k(t)$  – максимально возможная прибыль за годы, начиная с  $k$ .

Отметим, что при  $\Pr(t) + F_{k+1}(t+1) = \Pr(0) - p + F_{k+1}(1) + S(t)$  оборудование сохраняется. Но в некоторых случаях возникает проблема, когда на некотором шаге  $F_k(n-1) = \Pr(n-1) + F_{k+1}(n)$  и, следовательно, оборудование возраста  $n-1$  год должно быть сохранено. А так как  $F_{k+1}(n+1)$  – неизвестно, поскольку в плановом периоде  $n$  лет, то значение  $F_k(n)$  не может быть определено.

В [8] были предложены три способа преодоления данной проблемы. Один из них основан на увеличении длительности планового периода. В данной работе мы предлагаем ещё один способ построения функции Беллмана с учетом прогнозируемых значений прибыли и остаточной стоимости оборудования, возраста больше, чем имеющееся в наличии.

Прогнозы могут основываться на информации об этих значениях на аналогичных предприятиях, имеющих в наличии оборудование большего возраста. От точности прогнозов зависит уровень адекватности модели. По этой причине существенное увеличение длительности планового периода нежелательно.

Рассмотрим абстрактный пример (см. [8]). Продолжительность планового периода 6 лет. Данные о прибыли и остаточной стоимости оборудования возраста  $t$  приведены в таблице 1, а цена единицы нового оборудования –  $p = 14$  ден.ед.

Таблица 1

Исходные данные							
$t$	0	1	2	3	4	5	6
$\Pr(t)$	8	7	7	6	6	6	5
$S(t)$	12	8	6	4	2	2	2

Увеличим длительность планового периода до десяти лет на основе прогнозируемых значений прибыли от эксплуатации и остаточной стоимости оборудования возраста от 7 до 10 лет (см. таблицу 2).

Таблица 2

Данные, с учетом прогнозов

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Pr(t)$	8	7	7	6	6	6	5	4	3	2	0
$S(t)$	12	8	6	4	2	2	2	2	2	2	1

Однако, в отличие от третьего способа, описанного в [8], не будем отбрасывать фиктивную часть таблицы. Результаты вычислений приведены в таблице 3.

Таблица 3

Значения функции Беллмана для десятилетнего планового периода

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1(t)$	53	52	51	50	48	46	45	45	45	44
$F_2(t)$	49	46	45	45	44	42	41	40	40	38
$F_3(t)$	44	42	39	39	39	38	37	37	37	36
$F_4(t)$	41	37	35	33	33	33	33	33	33	32
$F_5(t)$	37	34	30	28	28	28	28	28	28	27
$F_6(t)$	32	30	27	24	22	22	22	22	22	21
$F_7(t)$	26	25	23	21	18	16	16	16	16	15
$F_8(t)$	20	19	18	17	15	12	10	10	10	9
$F_9(t)$	14	13	12	12	11	9	7	5	3	2
$F_{10}(t)$	7	7	6	6	6	5	4	3	2	0

Отметим, что в начале четвертого года возникает следующая ситуация: оборудование трёхлетнего возраста необходимо заменить, для четырёх- и пятилетнего – большую прибыль принесет сохранение (в таблице соответствующие прибыли выделены двойным подчёркиванием), а для шестилетнего варианты замены и сохранения равноприбыльны (одинарное подчёркивание), следовательно, более предпочтительно его сохранение.

Данная ситуация возникает из-за того, что остаточная стоимость оборудования трёхлетнего возраста выше, чем  $S(4)$  и  $S(5)$ , а прибыли от дальнейшей эксплуатации одинаковы. В таблице 3 серым цветом выделены клетки, для которых при сохранении оборудования четырёх- и пятилетнего возраста в четвёртом году планового периода будет получена совокупная прибыль на единицу больше, чем при его замене, то есть в первом году для оборудования возраста один и два года 54 и 53 ден. ед. соответственно.

На этапе безусловной оптимизации будем для простоты считать, что к началу первого года планового периода мы имеем шесть единиц оборудования (по одной возраста от одного до шести лет). Из таблицы видно, что в начале первого и второго года оборудование не заменяется, а в начале третьего года необходимо заменить одну единицу оборудования, возраст которого достиг восьми лет.

В начале четвёртого года возможны две стратегии. Первая: заменить всё оборудование, возраст которого превышает два года (а это пять единиц). При этом

$F_4(4) = F_4(5) = 33$  и, следовательно,  $F_3(3) = F_3(4) = 39$ ,  $F_2(2) = 46$ ,  $F_2(3) = 45$ ,  $F_1(1) = 53$ ,  $F_1(2) = 52$ . Вторая стратегия: заменить оборудование возраста 3, 7 и 8 лет  $F_4(4) = F_4(5) = 34$ ,  $F_3(3) = F_3(4) = 40$ ,  $F_2(2) = 47$ ,  $F_2(3) = 46$ ,  $F_1(1) = 54$ ,  $F_1(2) = 53$ . А поскольку трехлетнего оборудования нет в наличии, то заменяются две единицы.

Результаты распределения количества оборудования различного возраста при применении первой стратегии приведены в таблице 4, а второй – в таблице 5.

Отметим, что возможность применения различных стратегий возникает из-за ситуации, описанной выше. Данные в таблицах за семь, а не за шесть лет приведены, поскольку для получения распределения прибылей по годам, нам понадобятся данные за седьмой год. В таблицах приведено распределение количества оборудования на начало года: до принятия решения о его замене или сохранении.

Таблица 4

Распределение количества оборудования различного возраста (стратегия 4.1)

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8
$K_1(t)$	1	1	1	1	1	1		
$K_2(t)$		1	1	1	1	1	1	
$K_3(t)$			1	1	1	1	1	1
$K_4(t)$	1			1	1	1	1	1
$K_5(t)$	2	1			1	1	1	
$K_6(t)$	2	2	1			1		
$K_7(t)$	1	2	2	1				

Таблица 5

Распределение количества оборудования различного возраста (стратегия 4.2)

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8
$K_1(t)$	1	1	1	1	1	1		
$K_2(t)$		1	1	1	1	1	1	
$K_3(t)$			1	1	1	1	1	1
$K_4(t)$	1			1	1	1	1	1
$K_5(t)$	5	1						
$K_6(t)$		5	1					
$K_7(t)$			5	1				

Прибыль, полученная за каждый год планового периода, вычисляется по формуле:

$$G \text{Pr}(i) = \sum_{t=1}^n (K_i(t)F_i(t) - K_{i+1}(t)F_{i+1}(t)). \quad (1)$$

Распределение прибылей по годам при применении третьего и четвертого (стратегий 4.1, 4.2) способов приведено в таблице 6.

Мы видим, что наибольшая совокупная прибыль должна быть получена при применении стратегии с использованием третьего способа построения функции Беллмана (см. [8]): построения усечённой таблицы.

Однако, сравнивая таблицы распределений количества оборудования, мы видим, что к началу шестого года, средний возраст оборудования при использовании третьего способа значительно выше, чем при применении стратегии 4.2. Следовательно, в ближайшее время после окончания планового периода, понадобится очередное обновление.

Таблица 6

Распределение прибылей по годам при применении стратегий 3, 4.1 и 4.2

$i$	1	2	3	4	5	6	GPr
$GPr_3(i)$	28	28	28	37	34	30	185
$GPr_{4.1}(i)$	37	34	23	16	19	30	159
$GPr_{4.2}(i)$	37	34	23	-13	42	41	164

На прибыль влияют инвестиции, распределение которых по годам:

$$I(i) = \sum_{t=1}^n K'_i(t)(p - S(t)).$$

где  $K'_i(t)$  – количество оборудования возраста  $t$ , которое заменяется в начале соответствующего года.

При применении стратегии 3, будет вложено 36 ден.ед. на протяжении шестилетнего периода, а при применении стратегии 4 – 72 ден.ед., что приводит к уменьшению прибыли в первый год после вложений и увеличению в последующем.

Таким образом, предлагаемый нами способ является более эффективным, чем рассмотренные ранее. Его надёжность связана с точностью прогнозов и существенно зависит от конъюнктуры рынка.

Применяя стратегию 4, мы видим, что оборудование более, чем восьмилетнего возраста отсутствует. Исходя из этого, мы можем рассмотреть ещё один способ: усечения матрицы значений функции Беллмана до восьми лет. Более того, мы можем рассматривать усечённые матрицы 7x7 или 9x9 сравнивать прибыли и инвестиции и принимать соответствующие решения.

Преимущество данного способа заключается в том, что мы можем рассматривать усечённые таблицы и сравнивать результаты, получаемые при применении различных стратегий. Например, таблица 5, приведенная в [8] получается из таблицы 3, приведенной в данной работе, если отбросить первые четыре строки и изменить нумерацию.

В таблицах 7 и 8 приведено распределение оборудования по годам при условии усечения матрицы значений функции Беллмана до восьми лет.

При замене одной единицы оборудования будет затрачено  $p - S(t)$  ден.ед. Поэтому кроме распределения прибылей необходимо проанализировать и распределение инвестиций по годам. Мы видим, что стратегия 3 приносит большую прибыль в плановом периоде за счёт того, что в обновление оборудования вкладывается 36 ден.ед. При применении стратегий 4.1 и 4.2 – 72 ден.ед. Однако, для 4.2 в начале четвёртого года необходимо вложить одновременно 60 ден.ед. Для

стратегии 5.1 и 5.2 инвестиции составили 58 ден.ед. Отметим, что остаточная стоимость оборудования возраста 3 года  $S(3)=4$ , а для оборудования большего возраста  $S(t)=2$ . Таким образом, необходимо вовремя продать оборудование трёхлетнего возраста.

Для стратегий 5.1 и 5.2 к концу шестого года будем иметь только одну единицу возраста шесть лет, а остальное оборудование не более, чем четырёхлетнего возраста.

Таблица 7

Распределение оборудования по годам при условии усечения матрицы значений функции Беллмана до восьми лет (стратегия 5.1)

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8
$K_1(t)$	1	1	1	1	1	1		
$K_2(t)$		1	1	1	1	1	1	
$K_3(t)$	2		1		1	1	1	
$K_4(t)$	2	2		1		1		
$K_5(t)$	1	2	2		1			
$K_6(t)$		1	2	2		1		
$K_7(t)$			1	2	2		1	

Таблица 8

Распределение оборудования по годам при условии усечения матрицы значений функции Беллмана до восьми лет (стратегия 5.2)

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8
$K_1(t)$	1	1	1	1	1	1		
$K_2(t)$		1	1	1	1	1	1	
$K_3(t)$	5		1					
$K_4(t)$		5		1				
$K_5(t)$			5		1			
$K_6(t)$				5		1		
$K_7(t)$					5		1	

Отметим, что стратегия 5.2 в течение восьми лет принесет меньшую прибыль, чем стратегия 5.1 и требует больших инвестиций не втором году планового периода. Однако, за первые четыре года планового периода она принесёт 108 ден.ед. прибыли, а 5.1 – 103 ден.ед. Это может повлиять на решение в пользу применения стратегии 5.2, поскольку оценка прибыли в более поздних периодах становится меньше с учётом влияния случайных факторов, которые сложно предсказать.

В [8] приведена таблица распределений прибылей по годам для стратегий, соответствующих первым трём способам построения функции Беллмана, из которой видно, что наиболее эффективной является стратегия 3, поскольку требует наименьших вложений, и приносит наибольшую совокупную прибыль для любого периода, начиная с первого года вплоть до шестого. Поэтому мы будем сравнивать лишь стратегии 3, 4.1, 4.2, 5.1 и 5.2. Применение стратегий 4.1 и 4.2 требует больших инвестиций и приносит значительно меньшую прибыль, чем остальные. Кроме того, на их адекватность

большее влияние оказывает точность прогнозов. Поэтому эксперт вряд ли станет их рассматривать.

Таким образом, при принятии решения, рассматриваются стратегии 3, 5.1, 5.2.

В таблице 9 приведено распределение прибылей по годам при использовании этих стратегий, а в таблице 10 – распределение инвестиций.

В этом отношении стратегия 3 только в первый год принесёт меньшую прибыль, чем 5.1 и 5.2. А уже за первые два года планового периода прибыль от её применения превысит прибыль от применения 5.1. Однако, к концу планового шестилетнего периода возраст оборудования в этом случае будет от 4-х до 9 лет, и наверняка, потребуется заменить более, чем одну единицу.

Таблица 9

Распределение прибылей по годам при использовании стратегий 3, 5.1 и 5.2

$i$	1	2	3	4	5	6	GPr
$GPr_3(i)$	28	28	28	37	34	30	185
$GPr_{51}(i)$	37	18	18	30	39	36	178
$GPr_{52}(i)$	37	-11	41	41	36	35	179

Таблица 10

Распределение инвестиций по годам при использовании стратегий 3, 5.1 и 5.2

$i$	1	2	3	4	5	6	GI
$I_3(i)$	12	12	12				36
$I_{51}(i)$		22	24	12			58
$I_{52}(i)$		58					58

Безусловно, выбор оптимальной стратегии обновления оборудования зависит от распределения количества оборудования к началу первого года. Например, если к началу первого года, мы имеем по две единицы оборудования, возраста 1 2 лет и по одной – 5 и 6 лет, то прибыли составят, соответственно 198 ден.ед для стратегии 3 и 189 ден.ед для стратегии 5. При этом инвестиции – 24 ден.ед и 44 ден.ед соответственно. Отметим, однако, что при неизменной конъюнктуре рынка, в случае применения стратегии 3 в начале следующего планового периода необходимо будет заменить оборудование возраста шесть и более лет. А это 4 единицы, а для стратегии 5 замен не будет (в данном случае заменяется 2 единицы оборудования).

### Выводы

На уровень адекватности рассматриваемой нами модели существенное влияние оказывает конъюнктура рынка. В частности, расширение мобильных сетей в 2005–2006 годах привело к резкому падению цен на средства связи, что повлияло на достоверность прогнозов и, следовательно, принятые ранее стратегии обновления оказались ошибочными.

Для удобства мы рассматриваем шаг в один год. Однако, в случае оборудования с быстрым моральным износом, можно уменьшить шаг до одного квартала, если конечно это не связано с сезонным изменением в эксплуатации (например, сельскохозяйственное оборудование). Кроме того, для простоты мы рассмотрели случай равномерного распределения количества оборудования по возрасту. Но поскольку формула (1) справедлива для любых распределений, то это не оказывает влияния на алгоритм выработки оптимальных стратегий обновления.

**Список использованной литературы**

1. Bellman R. Dynamic Programming. Princeton. New Jersey: Princeton University Press, 2010. 392 p.
2. Taha H. Operations Research: An Introduction, 10th Edition. Boston: Princeton, 2017. 848 p.
3. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. М.: Финансы и статистика, 2001. 544 с.
4. Denardo, E. V. Dynamic Programming: Models and Applications. New York, Courier Corporation, 2012. 240 p.
5. Bertsekas, D. P. Dynamic Programming and Optimal Control. Belmont, Massachusetts, 2012. 1270 p.
6. Gelrud, Ya. D., Gollay A. V. Mathematical Models of Replacement and Wearing of Equipment *Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника»*. 2018. Т. 18, № 2. С. 121–130.
7. Шумейко О. А. Динамічна модель оптимального розподілу інвестицій при заміні обладнання. *Економіко-математичне моделювання соціально-економічних систем*. 2012. №17. С. 255–267.
8. Андрейцев А. Ю., Вяла Ю. Э., Гейлик А. В., Ляшко О. В., Смирнов И. В. Задача о замене оборудования: некоторые специальные случаи. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2019. №2(69). С. 153–159.

**References**

1. Bellman, R. (2010). Dynamic Programming. Princeton. New Jersey: Princeton University Press.
2. Taha, H. (2017). Operations Research: An Introduction. 10th Edition. Boston: Princeton.
3. Fomin, G. P. (2001). Matematicheskie metody i modeli v kommercheskoy deyatelnosti. M.: Finansyi i statistika.
4. Denardo, E. V. (2012). Dynamic Programming: Models and Applications. New York: Courier Corporation.
5. Bertsekas, D. P. (2012). Dynamic Programming and Optimal Control Belmont, Massachusetts Institute of Technology.
6. Gelrud, Ya. D., & Gollay, A. V. (2018). Mathematical Models of Replacement and Wearing of Equipment. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Kompyuternyye tehnologii, upravlenie, radioelektronika»*. **18**, 2, 121–130.
7. Shumeiko, O. A. (2012). Dynamichna model optymalnoho rozpodilu investytsii pry zaminni obladnannia. *Ekonomiko-matematychnye modeliuvannia sotsialno-ekonomichnykh system*. **17**, 255–267.
8. Andreytsev, A. Yu., Vyala, Yu. E., Heylik, A. V., Liashko, O. V., & Smyrnov, Y. V. (2019). Zadacha o zamene oborudovaniya: nekotorye spetsyalnye sluchai. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. **2** (69), 153–159.

Андрейцев Андрей Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры высшей и прикладной математики Государственного университета инфраструктуры и технологий, e-mail: andr7765@i.ua, ORCID 0000-0003-3969-185X.

Вяла Юлия Эдуардовна – старший преподаватель кафедры высшей и прикладной математики Государственного университета инфраструктуры и технологий, e-mail: j-mineewa@ukr.net, ORCID 0000-0003-0369-3570.

Гейлик Анастасия Вадимовна – к.п.н., доцент кафедры высшей и прикладной математики Государственного университета инфраструктуры и технологий, e-mail: geilik@meta.ua, ORCID 0000-0002-4675-5711.

Клецкая Татьяна Сергеевна – к.и.н., доцент, доцент кафедры высшей и прикладной математики Государственного университета инфраструктуры и технологий, e-mail: vellaer@i.ua, ORCID 0000-0003-3969-185X.

Ляшко Ольга Викторовна – к.ф.-м.н., доцент, заведующая кафедрой высшей и прикладной математики Государственного университета инфраструктуры и технологий, e-mail: olga\_liashko@ukr.net, ORCID 0000-0003-2616-898X.