

УДК 514.18

Т.А. КРЕСАН, С.Ф. ПИЛИПАКА, І.Ю. ГРИЩЕНКО, В.М. БАБКА, Я.С. КРЕМЕЦЬ
Національний університет біоресурсів і природокористування України

ТРАЕКТОРІЇ ТОЧОК ПЛОСКОЇ ФІГУРИ, КРИВОЛІНІЙНИЙ КОНТУР ЯКОЇ КОТИТЬСЯ БЕЗ КОВЗАННЯ ПО ПРЯМІЙ ЛІНІЇ

Розглянуто плоско-паралельний рух фігури, обмеженої криволінійним контуром. Фігура котиться без ковзання по прямій лінії. Розроблено аналітичний опис знаходження траєкторії точки, яка жорстко закріплена на фігурі, або ж здійснює в рухомій системі фігури заданий відносний рух. Наведено параметричні рівняння абсолютної траєкторії точки. Розглянуто конкретні приклади для плоскої фігури, обмеженої параболою. Показано, що траєкторією фокуса параболі, яка котиться по прямій лінії, є ланцюгова лінія. Зроблено перевірку для кола і отримано відому криву – циклоїду, а також її варіанти – подовжену і укорочену циклоїди. Розглянуто випадок, коли криволінійним контуром плоскої фігури є крива, задана натуральним рівнянням. Виведено узагальнені параметричні рівняння абсолютної траєкторії точки, яка здійснює відносно переміщення в рухомій системі координат, жорстко зв'язаної із плоскою фігурою.

Ключові слова: кочення, плоска фігура, криволінійний контур, плоско-паралельний рух, траєкторія точки, параметричні рівняння.

Т.А. КРЕСАН, С.Ф. ПИЛИПАКА, І.Ю. ГРИЩЕНКО, В.Н. БАБКА, Я.С. КРЕМЕЦЬ
Національний університет біоресурсів і природопользования Украины

ТРАЕКТОРИИ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ, КРИВОЛИНЕЙНЫЙ КОНТУР КОТОРОЙ КАТИТСЯ БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ ПО ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Рассмотрено плоско-параллельное движение фигуры, ограниченной криволинейным контуром. Фигура катится без скольжения по прямой линии. Разработано аналитическое описание нахождения траектории точки, которая жестко закреплена на фигуре, или же осуществляет в подвижной системе фигуры заданное относительное движение. Приведены параметрические уравнения абсолютной траектории точки. Рассмотрены конкретные примеры для плоской фигуры, ограниченной параболой. Показано, что траектории фокуса параболы, которая катится по прямой линии, является цепная линия. Сделано проверку для окружности и получено известную кривую – циклоиду, а также ее варианты – удлиненную и укороченную циклоиды. Рассмотрен случай, когда криволинейным контуром плоской фигуры является кривая, заданная натуральным уравнением. Выведены обобщенные параметрические уравнения абсолютной траектории точки, которая осуществляет относительное перемещение в подвижной системе координат, жестко связанной с плоской фигурой.

Ключевые слова: качение, плоская фигура, криволинейный контур, плоско-параллельное движение, траектория точки, параметрические уравнения.

T.A. KRESAN, S.F. PYLYPAKA, I.Yu. GRISCHENKO, V.M. BABKA, Ya.S. KREMETS
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

TRAJECTORIES OF POINTS OF A FLAT FIGURE, A CURVILINE CIRCUIT WHICH ROLLS WITHOUT SLIDING ON A DIRECT LINE

The plane-parallel motion of a figure bounded by a curvilinear contour is considered. The figure rolls without sliding on a straight line. An analytical description of finding the

trajectory of a point, which is rigidly fixed to the figure, or makes a relative motion in the moving system of the figure, is developed. A classic example of this is finding a trajectory of a point on the rim of a wheel that rolls without sliding in a straight line. It is well known that such a trajectory is a cycloid. If the point is located outside the rim, then its trajectory is an elongated cycloid, if inside the rim is a shortened cycloid. This list exhausts the set of possible trajectories of a shape in the form of a wheel. For second-order curves that act as a curvilinear contour of a figure that rolls on a straight line, the set of trajectories of the individual points of the figure increases. If such a point is the focus of the second-order curve, then its trajectory is a known curve which name is assigned to the specific name of the curve. In particular, if such a curve is a parabola, then the trajectory of focus is a known curve, called a chain line. The choice of a point in an arbitrary place of a curvilinear contour, bounded by a parabola, expands the set of trajectories. The paper presents generalized parametric equations for finding them if the curve of a curvilinear contour is given by parametric equations. Specific examples for a flat figure bounded by a parabola are considered. It is shown that the trajectory of the focus of the parabola, which rolls on a straight line, is a chain line. The circle was checked and the known curve - cycloid, and its variants - elongated and shortened cycloid were obtained. A case is considered when a point of a flat figure makes relative movement with respect to the internal coordinates of a moving flat figure. To find the absolute trajectory of a point, the figurative motion of a flat figure, which is rolled in a straight line, and the relative motion in a moving coordinate system rigidly connected to the flat figure, taken into account.

The paper focuses on curves of curvilinear contour, in parametric equations of which the arc length of the curve acts as an independent variable. This is important because this parameter is crucial in the analytical description of the rolling of a flat figure in a straight line. The analytical description is based on the equality of the length of the arc of the contour of the flat figure and the line along which it is rolling. For simplify of the analytical calculations the curves of contour given by the natural equation are considered. Examples are given and the trajectories of points of a flat figure are constructed, outlined with a contour which curve is given by the known natural equation of the chain line

Keywords: rolling, flat figure, curvilinear contour, plane-parallel motion, point trajectory, parametric equations.

Постановка проблеми

Під час робочого процесу технологічний матеріал у вигляді частинок контактує з поверхнями робочих органів. В процесі взаємодії частинка рухається по поверхні, описуючи певною точкою цілком визначену траєкторію. В праці [1] знайдено зовнішній контур плоских частинок і криволінійний профіль, по якому вони перекочуються без ковзання таким чином, що певна точка частинки при перекочуванні описує прямолінійну траєкторію. Загальновідома задача про траєкторію точки обода колеса, яке котиться по прямій лінії. Такою траєкторією є циклоїда. Якщо точка розташована не на ободі, тоді траєкторією буде укорочена або подовжена циклоїди [2]. Якщо ж взяти плоский контур іншої форми, то при його обкочуванні по прямій точки контуру утворять множину різноманітних кривих. Прикладом може служити кочення еліпса, фокуси якого при цьому описують траєкторії, відомі під назвою ундулоїда [3]. В статті пропонується загальний алгоритм побудови траєкторій точок плоского контуру, який котиться без ковзання по прямій лінії.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В праці [4] зазначено, що при перекочуванні кривих другого порядку їх фокуси описують криві, які є меридіанами поверхонь обертання сталої середньої кривини. Математик Делоне довів наступне твердження: меридіанами поверхонь обертання сталої середньої кривини є криві, які описують фокуси кривих другого порядку при їх коченні по

прямій лінії. Багато уваги приділено обкочуванню рухомого криволінійного контуру по нерухомому таким чином, щоб точка рухомого контуру описувала коло. Таке обкочування лежить в основі проектування зубчастих зачеплень з некруглими колесами [5–8].

Мета дослідження

Розробити аналітичний опис обкочування плоского криволінійного контуру по прямій лінії та побудови траєкторії точки, яка належить цьому контуруві.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо плоский контур, окреслений кривою лінією, який буде перекочуватися без ковзання по осі Ox . Положення плоскої фігури будемо розглядати по відношенню до двох плоских систем координат: нерухомої Oxy і рухомої $O_p x_p y_p$, жорстко прив'язаної до плоскої фігури. Нехай в початковий момент дві системи збігаються і плоска фігура дотикається до осі Ox в початку координат (рис. 1, а). Крива задана параметричними рівняннями $x=x(t)$ і $y=y(t)$, де t – незалежна змінна. При початковому значенні t (наприклад, при $t=t_0=0$) за рівняннями кривої отримаємо точку на ній, розташовану в початку координат. Надамо параметру t нового значення (наприклад, $t=t_A$). Цьому значенню параметра t на кривій відповідатиме точка A з координатами (x_A, y_A) (рис. 1,а). Через точку A проведемо дотичну до кривої, яка складатиме із віссю Ox кут φ . Його значення при $t=t_A$ знайдемо за відомою формулою: $\varphi = \arctg(y'/x')$. Повернемо криву разом із рухомою системою координат за годинниковою стрілкою навколо початку координат на кут φ , що відповідає його від'ємному значенню, за відомими формулами:

$$x_n = x \cos \varphi + y \sin \varphi; \quad y_n = -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \quad (1)$$

Після підстановки виразу кута φ у формули (1) і спрощення тригонометричних виразів отримаємо параметричні рівняння повернутої кривої:

$$x_n = \frac{yy' + xx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}; \quad y_n = \frac{yx' - xy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \quad (2)$$

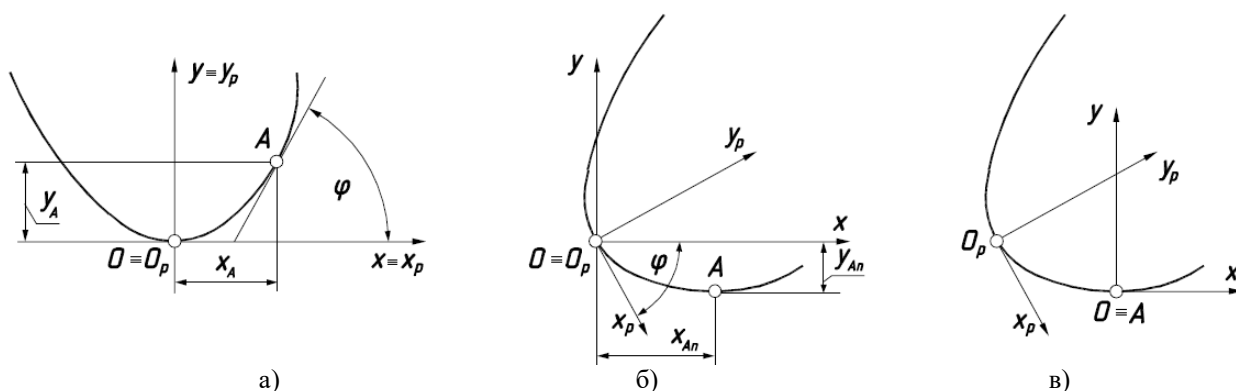


Рис. 1. Послідовні етапи побудови кривої при її коченні без ковзання по горизонтальній прямій:
 а) початкове положення кривої з точкою A на ній і дотичною в цій точці;
 б) здійснено поворот кривої навколо початку координат так, щоб дотична в точці A стала паралельною до осі Ox ;
 в) здійснено паралельний перенос кривої так, щоб точка A збігалася із початком координат.

Положення кривої після повороту показане на рис. 1, б. Дотична в точці A паралельна осі Ox . Наступний крок полягає у виконанні паралельного переносу на відстані x_{An} і y_{An} для того, щоб точка A співпала в початком координат нерухомої системи. Щоб зробити такий перенос, потрібно знайти довжини відрізків x_{An} і y_{An} . Оскільки ми криву

повернули на кут φ , то і точка A з координатами (x_A, y_A) повернулася разом з нею. Після повороту її координати в нерухомій системі за аналогією з формулами (2) запишуться так:

$$x_{An} = \frac{y_A y' + x_A x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}; \quad y_{An} = \frac{y_A x' - x_A y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \quad (3)$$

Після паралельного переносу рухомої системи отримаємо параметричні рівняння повернутої кривої, в якій точка A збігається із початком координат нерухомої системи:

$$\begin{aligned} x_{Ak} = x_n - x_{An} &= \frac{yy' + xx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \frac{y_A y' + x_A x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{y'(y - y_A) + xx' - x'x_A}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ y_{Ak} = y_n - y_{An} &= \frac{yx' - xy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \frac{y_A x' - x_A y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{x'(y - y_A) + y'(x_A - x)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Положення кривої, що відповідає рівнянням (4), показано на рис. 1, в. Останній етап складається зі зміщення повернутої кривої в напрямі осі Ox на величину s_A довжини дуги між точками O_p і A (рис. 1, в). Вона відповідає зміні параметра t від t_0 до t_A . Довжина вказаної дуги знаходиться за відомою формулою:

$$s_A = \int_{t_0}^{t_A} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt. \quad (5)$$

Остаточно параметричні рівняння кривої, яка перекотилася по прямій Ox і повернулася при цьому на кут $\varphi = \arctg(y'/x')$, величина якого залежить від значення параметра t_A , запишуться:

$$\begin{aligned} x_{Ak} &= \frac{y'(y - y_A) + x'(x - x_A)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \int_{t_0}^{t_A} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt; \\ y_{Ak} &= \frac{x'(y - y_A) - y'(x - x_A)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

В рівняннях (6) $x=x(t)$ і $y=y(t)$ – параметричні рівняння вихідної кривої; x' і y' – конкретні числа, отримані підстановкою t_A у вирази похідних (окрім підінтегрального виразу), x_A і y_A – координати, отримані підстановкою t_A у параметричні рівняння вихідної кривої.

Розглянемо конкретний приклад. За вихідну криву візьмемо параболу, задану параметричними рівняннями:

$$x = t; \quad y = at^2, \quad (7)$$

де a – стала величина.

Похідні функцій (7) дорівнюють:

$$x' = 1; \quad y' = 2at. \quad (8)$$

При $t_0=0$ вершина параболі знаходиться в початку координат. Положення точки A на параболі задане значенням змінної t_A . За формулою (6) знаходимо довжину дуги s_A :

$$s_A = \int_0^{t_A} \sqrt{1+4a^2t^2} dt = \frac{t_A}{2} \sqrt{1+4a^2t_A^2} + \frac{1}{4a} \operatorname{arcsinh}(2at_A). \quad (9)$$

Нехай $a=0,25$, $t_A=2$. Тоді згідно формули (7) $x_A=2$, $y_A=1$, згідно формули (8) $x'=1$, $y'=1$, згідно формули (9) $s_A=2,3$. Підставимо ці значення в систему (6) і отримаємо параметричні рівняння параболи, яка при коченні зайняла положення, що відповідає значенню $t_A=2$:

$$x_k = \frac{at^2 + t - 3}{\sqrt{2}} + 2,3; \quad y_k = \frac{at^2 - t + 1}{\sqrt{2}}. \quad (10)$$

На рис. 2, а за рівняннями (10) побудовано повернуту параболу при зміні параметра t в межах $t=-5\dots5$ для значення $t_A=2$. Поворот і положення параболи залежить від конкретного значення параметра t_A . Параметричні рівняння (10), які ми отримали поетапно, запишемо у більш загальному вигляді згідно формул (6), (7), (8), (9):

$$x_k = \frac{2at_A(at^2 - at_A^2) + t - t_A}{\sqrt{1+4a^2t_A^2}} + \frac{t_A}{2} \sqrt{1+4a^2t_A^2} + \frac{1}{4a} \operatorname{arcsinh}(2at_A);$$

$$y_k = \frac{at^2 - at_A^2 - 2at_A(t - t_A)}{\sqrt{1+4a^2t_A^2}}. \quad (11)$$

На рис. 2, б побудовано послідовні положення частини вітки параболи при зміні параметра $t=0\dots5$, яка котиться по прямій лінії, при різних значеннях сталої t_A , а на рис. 2, в – при зміні параметра $t=-5\dots5$. Можна прослідкувати траєкторію окремих точок параболи, наприклад, розташованих на кінцях частини вітки (рис. 2, б). Звідси випливає, що траєкторію певної точки кривої, яка котиться по прямій, можна отримати в дискретному вигляді, задавши конкретне значення змінної t і надаючи з інтервалом значень для t_A (наприклад, через одиницю, як це зроблено на рис. 2, б).

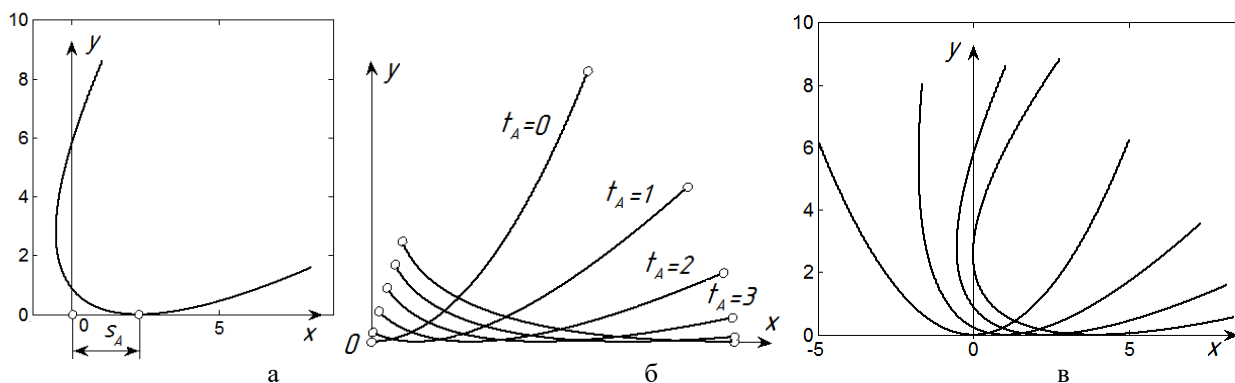


Рис. 2. Графічні ілюстрації до побудови окремих положень кривої при її коченні без ковзання по горизонтальній прямій:

- а) окреме положення параболи, побудоване за рівняннями (11) при $t_A=2$ і зміні незалежного параметра t в межах $t=-5\dots5$;**
- б) окремі вітки кривої для вказаних значень t_A при її перекочуванні, яка відповідає зміні незалежного параметра t в межах $t=0\dots5$;**
- в) ілюстрація окремих положень параболи при її коченні по прямій, побудова якої здійснена для $t=-5\dots5$.**

Отже, якщо в параметричних рівняннях (11) t і t_A поміняти місцями, тобто змінна t стає сталою t_A , яка задає положення точки A на кривій, і t_A стає змінною t , то вони опишуть неперервну траєкторію точки A при коченні параболи. Точку A можна взяти і за межами

кривої, задавши її положення координатами в рухомій системі $O_{px_p y_p}$. При коченні плоского контуру вона рухається разом із ним і будь-яка точка у рухомій системі опише відповідну траєкторію. Щоб отримати параметричні рівняння цієї траєкторії, потрібно у рівняннях (6) сталі величини x_A, y_A (координати точки A на кривій) замінити параметричними рівняннями $x=x(t), y=y(t)$ самої кривої, а значення похідних в цій точці замінити виразами цих похідних. Після цього параметричні рівняння (6) запишуться так:

$$x_{\kappa A} = \frac{y'(y_A - y) + x'(x_A - x)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \int \sqrt{x'^2 + y'^2} dt; \quad y_{\kappa A} = \frac{x'(y_A - y) - y'(x_A - x)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \quad (12)$$

Підставимо в них рівняння параболи (7), її прохідних (8) і вираз довжини дуги (9) і отримаємо:

$$\begin{aligned} x_{\kappa A} &= \frac{2at(y_A - at^2) + x_A - t}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}} + \frac{t}{2}\sqrt{1 + 4a^2t^2} + \frac{1}{4a} \operatorname{Arcsinh}(2at); \\ y_{\kappa A} &= \frac{y_A - at^2 - 2at(x_A - t)}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Перевіримо отримані рівняння (13). Підставимо в них координати вершини параболи $x_A=0, y_A=0$. В цьому випадку ми маємо отримати її траєкторію, яка у вигляді точкового ряду зображена на рис. 2, б. Інша траєкторія у вигляді точкового ряду побудована для верхньої точки вітки кривої, яка має координати $x_A=5, y_A=6,25$. Ці криві побудовано у вигляді суцільних ліній за рівняннями (13) на рис. 3, а.

Відомо, що фокус параболи при її коченні по прямій описує ланцюгову лінію [4]. Фокус параболи знаходиться на осі симетрії на відстані $1/(4a)$ від вершини. Отже, координати фокуса будуть: $x_A=0, y_A=1$. На рис. 3, б за рівняннями (13) побудовано ланцюгову лінію і інші траєкторії для різних значень координати y_A .

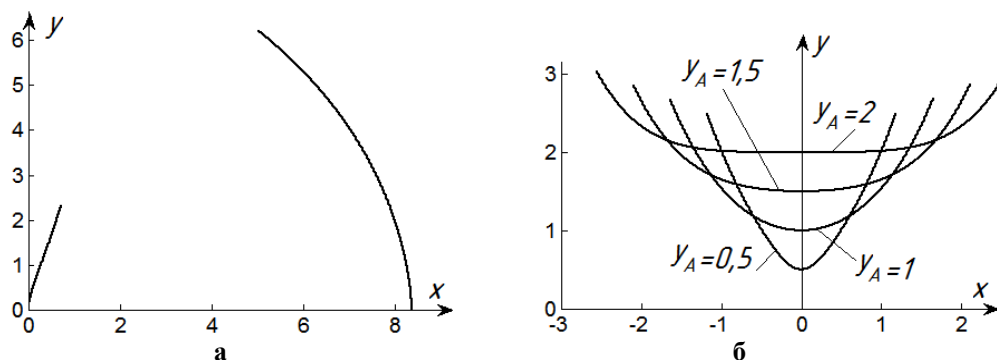


Рис. 3. Траєкторії різних точок плоского контуру, окресленого по параболі, при його коченні по прямій:

- а) траєкторії вершини параболи ($x_A=0, y_A=0$) і точки на параболі ($x_A=5, y_A=6,25$);
- б) траєкторії точок параболи, розташованих на її осі симетрії (в тому числі ланцюгова лінія при $x_A=0, y_A=1$).

Якщо координати фокуса параболи $x_A=0, y_A=1/(4a)$ підставити у отримані рівняння (13), тоді після спрощень одержимо наступні вирази:

$$x_{\kappa A} = \frac{1}{4a} \operatorname{arcsinh}(2at); \quad y_{\kappa A} = \frac{\sqrt{1 + 4a^2t^2}}{4a}. \quad (14)$$

Рівняння (14) є параметричними рівняннями ланцюгової лінії.

Розглянемо відомий випадок кочення кола. Його параметричні рівняння та похідні мають вигляд:

$$\begin{aligned} x &= R \cos t; & y &= R \sin t; \\ x' &= -R \sin t; & y' &= R \cos t. \end{aligned} \quad (15)$$

Підставимо вирази (15) у рівняння (12) і отримаємо:

$$\begin{aligned} x_{\kappa A} &= Rt - x_A \sin t + y_A \cos t; \\ y_{\kappa A} &= R - x_A \cos t - y_A \sin t. \end{aligned} \quad (16)$$

Якщо точка A жорстко прикріплена до площини кола, то при його коченні по прямій траєкторіями точки можуть бути лише наступні лінії: пряма (точка в центрі кола), циклоїда (точка на колі) вкорочена циклоїда (точка всередині кола) і подовжена циклоїда (точка за межами кола). Всі перераховані лінії можна побудувати при відповідних значеннях $x_A = \text{const}$ і $y_A = \text{const}$. Однак точка може рухатися в площині кола при його коченні по прямій. Закон такого руху можна задати залежностями $x_A = x_A(t)$ і $y_A = y_A(t)$. Нехай точка рухається по рухомій площині кола в радіальному напрямі, починаючи від його верхньої точки. Такий рух опишеться залежностями: $x_A = 0$, $y_A = \pm R + \omega t$, де ω – стала, від якої залежить швидкість руху. На рис. 4, а побудовано траєкторію точки, яка рухається від центра кола (вгору) і до його центра (внизу) при $R=5$ і $\omega=0,5$.

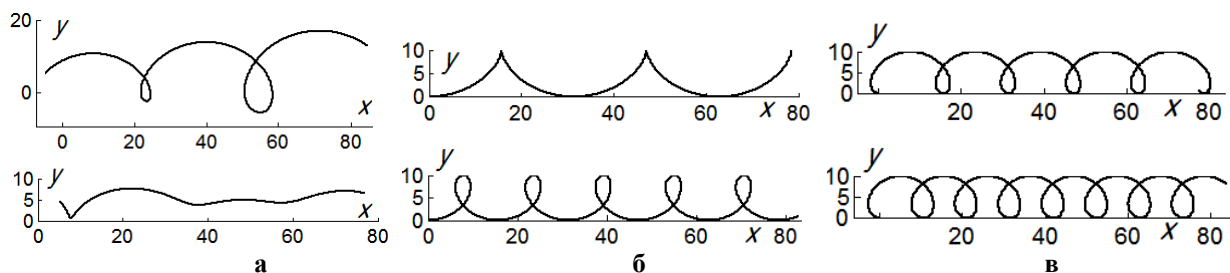


Рис. 4. Абсолютні траєкторії точки, яка здійснює відносне переміщення в площині кола радіуса $R=5$, що котиться по прямій:

- а) точка рухається в радіальному напрямі від центра кола (рис. вгору) і до його центра (рис. внизу);
- б) точка рухається по колу в напрямі руху точки контакту кола з прямою при $\omega=2$ (вгору) і $\omega=3$ (внизу);
- в) точка рухається по колу в протилежну сторону руху точки контакту кола з прямою при $\omega=-1$ (вгору) і $\omega=-2$ (внизу).

Відносний рух точки в площині кола можна також задати залежностями $x_A = x$ і $y_A = y$, тобто залежностями (15). В такому випадку згідно рівнянь (12) абсолютною траєкторією точки A буде пряма лінія, описана рівняннями $x_{\kappa A} = s$, $y_{\kappa A} = 0$. Це означає, що крива котиться по прямій і одночасно з такою ж лінійною швидкістю точка рухається по кривій, тобто вона не відривається від точки контакту кривої із прямою лінією. Однак точка по кривій може рухатися в одну або протилежну сторону із різними швидкостями. В такому випадку закон відносного руху точки по кривій запишеться рівняннями (15) із введенням сталої ω , від знака якої залежить напрям руху точки, а від величини – швидкість:

$$x_A = R \cos \omega t; \quad y_A = R \sin \omega t. \quad (17)$$

Підставимо (17) у (16) і отримаємо рівняння абсолютної траєкторії точки, що рухається по колу, яке одночасно котиться по прямій лінії:

$$\begin{aligned} x_{\kappa A} &= Rt - R \cos \omega t \sin t + R \sin \omega t \cos t = Rt - R \sin[(1 - \omega)t]; \\ y_{\kappa A} &= R - R \cos \omega t \cos t - R \sin \omega t \sin t = R - R \cos[(1 - \omega)t]. \end{aligned} \quad (18)$$

При $\omega=1$ згідно параметричних рівнянь (18) абсолютною траєкторією буде пряма лінія. На рис. 4, б вгорі побудована абсолютна траєкторія при $\omega=2$, а внизу – при $\omega=3$. Отже, при швидкості руху точки по колу, вдвічі більшій за швидкість точки контакту кола із прямою, абсолютною траєкторією буде циклоїда. Якщо ж швидкість точки зростає (як, наприклад, при $\omega=3$), тоді в абсолютній траєкторії з'являється петля, тобто вона стає подібною до подовженої циклоїди, але не є нею (рис. 4, б внизу). На рис. 4, в побудовані абсолютні траєкторії при від'ємних значеннях ω . В цьому випадку точка по кривій рухається в протилежну сторону від напрямку руху точки контакту. При $\omega=0$ точка на колі залишається нерухомою, тому рівняння (18) описують циклоїду, у якої точки звороту розташовані на осі Ox на відміну від циклоїди, зображеної на рис. 4, б вгорі.

Параметричні рівняння (12) застосуємо до кривої плоского контуру, заданої натуральним рівнянням $k=k(s)$, де s – незалежна змінна – довжина дуги кривої. Перехід до параметричних рівнянь кривої здійснюється за наступними виразами:

$$x = \int \cos\left(\int k ds\right) ds; \quad y = \int \sin\left(\int k ds\right) ds. \quad (19)$$

Перші похідні функцій (19) запишуться:

$$x' = \cos\left(\int k ds\right); \quad y' = \sin\left(\int k ds\right), \quad (20)$$

де $\int k ds = \varphi$ – кут повороту кривої при її коченні по прямій.

Після підстановки виразів (19) та їх похідних (20) у рівняння (12) отримаємо:

$$\begin{aligned} x_{\kappa A} &= \left[y_A - \int \sin\left(\int k ds\right) ds \right] \sin\left(\int k ds\right) + \left[x_A - \int \cos\left(\int k ds\right) ds \right] \cos\left(\int k ds\right) + s; \\ y_{\kappa A} &= \left[y_A - \int \sin\left(\int k ds\right) ds \right] \cos\left(\int k ds\right) - \left[x_A - \int \cos\left(\int k ds\right) ds \right] \sin\left(\int k ds\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Розглянемо приклад. За криву плоского контуру візьмемо ланцюгову лінію, натуральне рівняння якої має вигляд:

$$k = \frac{a}{a^2 + s^2}, \quad (22)$$

де a – стала величина.

За формулами (19), (20) знаходимо:

$$x = \int \cos\left(\int k ds\right) ds = a \cdot \operatorname{arcsinh} \frac{s}{a}; \quad y = \int \sin\left(\int k ds\right) ds = \sqrt{a^2 + s^2}; \quad (23)$$

$$x' = \cos\left(\int k ds\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}}; \quad y' = \sin\left(\int k ds\right) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}}. \quad (24)$$

Після підстановки виразів (23), (24) у формули (21) отримаємо параметричні рівняння абсолютної траєкторії точки A , яка зафіксована або ж здійснює відносний рух у площині ланцюгової лінії, що котиться по прямій:

$$\begin{aligned} x_{KA} &= \left[y_A - \sqrt{a^2 + s^2} \right] \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}} + \left[x_A - a \cdot \operatorname{arcsinh} \frac{s}{a} \right] \frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}} + s; \\ y_{KA} &= \left[y_A - \sqrt{a^2 + s^2} \right] \frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}} - \left[x_A - a \cdot \operatorname{arcsinh} \frac{s}{a} \right] \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}}. \end{aligned} \quad (25)$$

На рис. 5 за рівняннями (25) побудовані траєкторії точок, що належать площині ланцюгової лінії, яка перекочується по прямій, причому ці точки розташовані як на самій кривій (рис. 5, а), так і поза її межами (рис. 5, б).

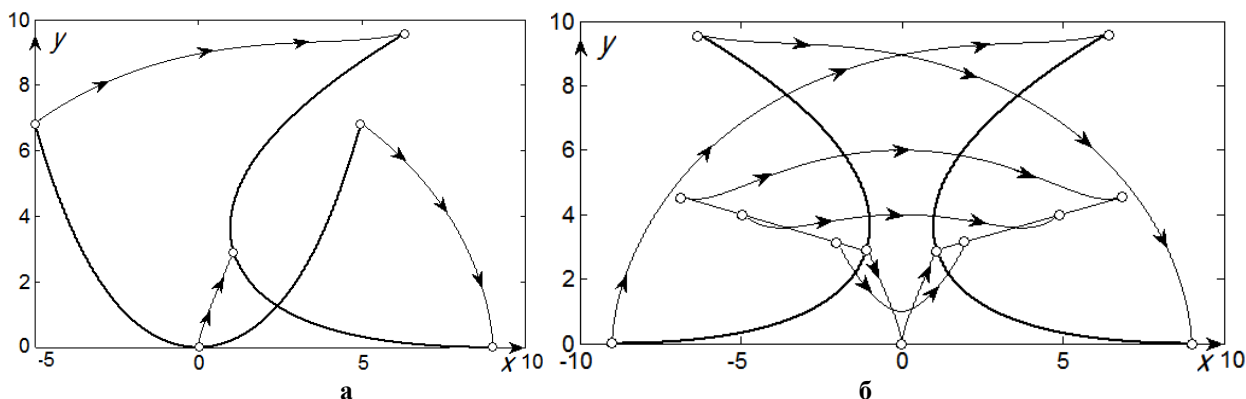


Рис. 5. Траєкторії різних точок плоского контуру, окресленого по ланцюговій лінії, при його коченні по прямій:

- а) траєкторії трьох точок, розташованих в нижній точці ланцюгової лінії та симетрично на кінцях зображених віток;
- б) траєкторії точок ланцюгової лінії, які лежать на кривій, а також розташовані на її осі симетрії.

Форма ланцюгової лінії певним чином подібна до форми параболи. Порівняння рис. 5 і 3 вказує на те, що траєкторії відповідних точок цих кривих є подібними. Напрямок руху окремої точки при перекочуванні контуру на рис. 5 позначено стрілками. Очевидно, що при зміні напрямку перекочування траєкторії точок залишаться ті ж самі, просто потрібно замінити напрям стрілок на протилежний.

Висновки

Здійснено аналітичний опис руху плоского контуру, окресленого кривою лінією, коли він перекочується по прямій без ковзання. Виведено параметричні рівняння траєкторії точки, яка рухається разом із плоским контуром. Точка може бути нерухомою по відношенню до рухомої системи координат, прив'язаної до рухомого контуру, або ж здійснювати в рухомій системі задане переміщення. В першому випадку положення точки задається двома координатами, в другому – двома залежностями. Якщо положення точки в рухомій системі координат задається залежностями у функції незалежної змінної вихідної кривої, то точка здійснює складний рух. Абсолютною траєкторією точки є сума відносного руху по відношенню до рухомої системи координат і переносного руху плоского контуру. Наведено приклади побудови траєкторій для перекочування параболи і ланцюгової лінії, а також здійснено перевірку отриманих рівнянь для відомого випадку перекочування кола.

Список використаної літератури

1. Заика П. М. Избранные задачи земледельческой механики. Киев: УСХА, 1992. 507 с.
2. Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. Москва: Физматгиз, 1960. 294 с.

3. Руденко С. Ю. Геометричне моделювання траєкторії фокуса еліпса, який котиться по прямій. *Праці ТДАТУ*. Вип. 4. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2011. Т. 49. С. 171–177.
4. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. Москва: Наука, 1981. 344 с.
5. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. Москва: Наука, 1968. 584 с.
6. Коврегін В. В., Маловик І. В. Аналітичний опис центроїд не круглих зубчатих коліс. *Праці ТДАТУ*. Вип. 4. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2011. Т. 49. С. 125–129.
7. Легета Я. П., Шоман О. В. Геометричне моделювання центроїд некруглих зубчастих коліс за передавальною функцією. *Геометричне моделювання та інформаційні технології*. 2016. № 2. С. 59–63.
8. Легета Я. П. Опис та побудова спряжених центроїд некруглих зубчастих коліс. *Сучасні проблеми моделювання*. 2014. Вип. 3. С. 87–92.

References

1. Zaika, P. M. (1992). *Izbrannyye zadachi zemledelcheskoy mehaniki*. Kiev: USHA. [In Russian]
2. Savelov, A. A. (1960). *Plane curves. Systematics, Properties, Applications*. Moscow: Fizmatgiz. [In Russian]
3. Rudenko, S. Yu. (2011). Geometric Modeling of the Trajectory of the Focus of the Ellipse, which Rolls in a Straight Line. *Proceedings of the TDAT: Issue 4. Applied geometry and engineering graphics*. **49**, 171–177. [In Ukrainian]
4. Hilbert, D., & Kon-Fossen, S. (1981). *Visual geometry*. Moscow: Science. [In Russian]
5. Litvin, F. L. (1968). *Theory of gears*. Moscow: Science. [In Russian]
6. Kovregin, V. V., & Malovik, I. V. (2011). Analytical Description of Centroid of non-Circular Gears. *Proceedings of the TDAT: Issue 4. Applied geometry and engineering graphics*. **49**, 125–129. [In Ukrainian]
7. Legeta, Ya. P., & Shoman, O. V. (2016). Geometric modeling of centroid of non-circular gears by transfer function. *Geometric Modeling and Information Technology*. **2**, 59–63. [In Ukrainian]
8. Legeta, Ya. P. (2014). Description and Construction of Conjugate Centroids of non-Circular Gears. *Modern Problems of Modeling*. **3**, 87–92. [In Ukrainian]

Кресан Тетяна Анатоліївна – к.т.н., докторант кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України, e-mail: tanyakresan@i.ua, ORCID: 0000-0002-8280-9502.

Пилипака Сергій Федорович – д.т.н., професор, завідувач кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України, e-mail: s.pylypaka@nubip.edu.ua, ORCID: 0000-0002-1496-4615.

Грищенко Ірина Юріївна – к.т.н., доцент, доцент кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України, e-mail: irgr@yahoo.com, ORCID: 0000-0002-1000-9805.

Бабка Віталій Миколайович – к.т.н., доцент, доцент кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України, e-mail: babkavitaliy@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4971-4285.

Кремець Ярослав Сергійович – к.т.н., асистент кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України, e-mail: psf55@ukr.net, ORCID: 0000-0003-0675-5757.