

УДК 004.942:519.6

І.В. МЕЛЬНИК

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

А.В. ПОЧИНОК

Університет державної фіскальної служби України,
Навчально-науковий інститут інформаційних технологій, м. Ірпінь, Київська область

ВИБІР МЕТОДУ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ГРАНИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ КОРОТКОФОКУСНИХ ЕЛЕКТРОННИХ ПУЧКІВ ЗА УМОВИ ЇХНЬОГО ТРАНСПОРТУВАННЯ В ІОНІЗОВАНОМУ ГАЗІ

У статті проведений порівняльний аналіз методів інтерполяції залежності радіуса короткофокусного електронного пучка від положення площини зрізу за повздожньою координатою по трьом базовим точкам. Інтерполяція проводиться на основі отриманих даних чисельного моделювання. Показано, що головна особливість аналітичних функцій, які описують такі залежності, полягає у тому, що вони мають один глобальний мінімум, а за межами області мінімуму характер цих залежностей є близьким до лінійного. Розглядаються два можливих методи інтерполяції таких залежностей. Перший з цих методів полягає у тому, що в області фокуса пучка використовується параболічна інтерполяція, а за межами цієї області функція має лінійний характер. Для описання таких залежностей використовується апарат математичної логіки та арифметико-логічні вирази. Недолік такого описання граничних траєкторій електронних пучків за умови їх проведення в іонізованому газі полягає у тому, що важко знайти таку базову точку, у якій необхідно здійснювати перехід від лінійної залежності до параболічної. Другий метод інтерполяції базується на використанні класу спеціальних функцій, якими є корені степені n з поліномів тієї ж самої степені. З використанням методів комп'ютерного моделювання показано, що поведінка таких функцій цілком відповідає ярусним залежностям, які описують траєкторії короткофокусних електронних пучків за умови їхнього транспортування в іонізованому газі. Показано, що у разі використання таких функцій інтерполяції розбіжність між результатами чисельного моделювання, які інтерполюються, та значеннями функцій інтерполяції, не перевищує кількох відсотків, а для більшості випадків складає частку відсотка. Тобто, на основі тестових комп'ютерних експериментів обґрунтовано, що використання як функцій інтерполяції коренів степені n з поліномів тієї ж самої степені є ефективним інструментом для описання граничних траєкторій короткофокусних електронних пучків в іонізованому газі. Отримані в статті результати мають важливе практичне значення для визначення фокальних параметрів короткофокусних електронних пучків, які формуються джерелами електронів на основі високовольтного тліючого розряду.

Ключові слова: електронний пучок, інтерполяція, арифметико-логічні вирази, клас алгебраїчних функцій

І.В. МЕЛЬНИК

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

А.В. ПОЧИНОК

Университет государственной фискальной службы Украины,
Учебно-научный институт информационных технологий, г. Ирпень Киевской области

ВЫБОР МЕТОДА ИНТЕРПОЛЯЦИИ ГРАНИЧНЫХ ТРАЕКТОРИЙ КОРОТКОФОКУСНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ ПРИ ИХ ТРАНСПОРТИРОВКЕ В ИОНИЗИРОВАННОМ ГАЗЕ

В статье проведен сравнительный анализ методов интерполяции зависимости радиуса короткофокусного электронного пучка от положения плоскости среза по продольной координате по трём базовым точкам. Интерполяция проводится с использованием полученных данных численного моделирования. Показано, что главная особенность аналитических функций, которые

описывают такие зависимости, состоит в том, что они имеют один глобальный минимум, а за пределами области минимума характер этих зависимостей является близким к линейному. Рассматриваются два возможных метода интерполяции таких зависимостей. Первый из этих методов состоит в том, что в области фокуса пучка используется параболическая интерполяция, а за пределами этой области функция имеет линейный характер. Для описания таких зависимостей используется аппарат математической логики и арифметико-логические выражения. Недостаток такого описания граничных траекторий электронных пучков при их проведении в ионизированном газе состоит в том, что сложно найти такую базовую точку, в которой необходимо осуществлять переход от линейной зависимости к параболической. Другой метод интерполяции базируется на использовании класса специальных функций, которыми являются корни степени n из полиномов той же степени. С использованием методов компьютерного моделирования показано, что поведение таких функций полностью соответствует овражным зависимостям, которые описывают траектории электронных пучков при их транспортировке в ионизированном газе. Показано, что при использовании таких функций интерполяции расхождение между результатами численного моделирования, которые интерполируются, и значениями функции интерполяции, не превышает нескольких процентов, а в ряде случаев составляет доли процента. Таким образом, на основе тестовых компьютерных экспериментов обосновано, что использование в качестве функций интерполяции корней степени n из полиномов той же степени является эффективным инструментом для описания граничных траекторий короткофокусных электронных пучков в ионизированном газе. Полученные в статье результаты имеют важное практическое значение для определения фокальных параметров короткофокусных электронных пучков, формируемых источниками электронов на основе высоковольтного тлеющего разряда.

Ключевые слова: электронный пучок, интерполяция, арифметико-логические выражения, класс алгебраических функций

I.V. MELNYK

National Technical University of Ukraine
'Igor Sikorskiy Kyiv Polytechnical Institute'

A.V. POCHYNOK

University of the State Fiscal Service of Ukraine,
Educational and Research Institute of Information Technology

CHOOSING THE METHOD OF INTERPOLATION OF THE BOUNDARY TRAJECTORIES OF SHORT-FOCUS ELECTRON BEAMS AND THEIR GUIDING IN THE IONIZED GAS

Comparative analyze of the methods of interpolation of dependence of electron beam radius on position of cutting plane by the longitudinal coordinate with using three basic point have been provided in the article. It is shown, that main particularity of analytical functions, which are described such dependences, is that they have one global minimum, and outside the minimum region the character of such dependences is similar to linear. Two different approaches to interpolation of such dependences are considered. First method is based on the assumption, that in the region of beam focus the parabolical interpolation is used, and outside the focal region used the linear function. For describing of such dependences, the apparat of mathematical logic and arithmetic-logic expressions have been used. The main disadvantage of such describing of boundary trajectories of electron beams, propagated in the ionized gas, is that it is usually difficult to find the basic point, where the transfer from linear to parabolical dependence have to be realized. Another method of interpolation is based on the use of class of special functions, which are defined as the roots of n power from the polynomials of the same power. It is shown with using the method of computer simulation, that the behavior of such functions is generally corresponded to the ravine dependence, which described the trajectories of electron beams, propagated in the ionized gas. It is shown, that with using of such interpolation functions the difference between the simulation results, which are interpolated, and the values of interpolation function, always isn't grater, than few percent, but in the most cases it consist the part of percent. Therefore, it is proved on the base of

testing computer experiments, that using as the interpolation functions the roots of n power from the polynomial's of the same power is the effective instrument for describing the boundary trajectories of short-focus electron beams in ionized gas. The obtained results are very important for the solution the practical task of defining the focal parameters of electron beams, generated by the electron sources, based on the high voltage glow discharge.

Keywords: electron beam, interpolation, arithmetic-logic expression, class of algebraic functions.

Постановка проблеми

Сьогодні електронно-променеві технології знаходять широке впровадження у різних галузях промисловості, зокрема у машинобудуванні, авіобудуванні, космічній індустрії, а також в приладобудуванні та електронній промисловості. Це пов'язано з такими несумлінними перевагами електронно-променевих технологій, як висока загальна та питома потужність електронного пучка, простота керування його просторовими параметрами з використанням електричних та магнітних полів, простота керування потужністю електронних пучків газодинамічним та електричним способом [1–4].

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Обробка матеріалів з використанням електронних пучків в імпульсному режимі дозволяє отримувати нові речовини з унікальними фізичними властивостями, і цей напрямок наукових та інженерних досліджень є вкрай перспективним для розвитку сучасних нанотехнологій та виробництва наноматеріалів [5]. Сьогодні перспективними напрямками розвитку електронно-променевих технологій є електронно-променеве зварювання та паяння виробів, нанесення металевих та композитних покриттів, електронно-променеве плавлення металів та неметалевих матеріалів, а також прецизійна електронно-променева обробка речовини, зокрема сучасні технології формування складних тривимірних поверхонь [6]. У табл. 1 наведені параметри електронних пучків, які використовуються сьогодні для різних процесів електронно-променевих технологій [1–4].

Таблиця 1
Параметри електронних пучків, які використовуються для різних процесів сучасних електронно-променевих технологій

Технологічний процес	Прискорювальна напруга $U_{пр}$, кВ	Струм електронного пучка $I_{п}$, А	Фокальний діаметр електронного пучка $d_{еп}$, мм	Загальна потужність електронного пучка $P_{еп}$, Вт	Питома потужність електронного пучка $P_{еп}$, Вт/см ²
Плавлення	15 – 40	1 – 40	10 – 50	$10^4 – 10^7$	$10^3 – 10^4$
Зварювання	15 – 175	0,01 – 1	0,1 – 5	$10^2 – 10^5$	$10^5 – 10^7$
Випаровування	10 – 40	0,1 – 10	3 – 30	$5 \cdot 10^2 – 5 \cdot 10^5$	$10^3 – 10^4$
Розмірна обробка	20 – 150	$10^{-3} – 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-4} – 0,1$	$10 – 10^3$	$10^5 – 10^9$

Сьогодні інженерна розробка джерел електронів, призначених для застосування в електронно-променевих технологіях, загалом проводиться за двома головними напрямками. Перший з них пов'язаний із подальшим удосконаленням конструкцій традиційних джерел електронів із розжарюваними катодами [1–3], а другий орієнтований на розробку джерел електронів, робота яких основана на новітніх фізичних принципах, зокрема на емісії заряджених частинок з іонізованого газу та плазми [4, 7 – 9]. Серед таких джерел електронів окреме місце займають електронні гармати на основі високовольтного

тліючого розряду (ВТР), в яких здійснюється емісія електронів з розвиненої поверхні холодного катоду як результат її бомбардування іонами залишкового газу [4, 7, 9].

Мета дослідження

Для подальшого розвитку та впровадження у промисловість сучасних перспективних електронно-променевих технологій необхідно розвивати сучасні методи математичного моделювання електронних пучків, зокрема, методи інтерполяції та апроксимації їх геометричних та енергетичних параметрів пучка [10–12]. Тому головною метою даної статті є порівняльний аналіз методів інтерполяції граничних траєкторій короткофокусного електронного пучка за умови його транспортування у низькому вакуумі в середовищі іонізованого газу. Зазвичай саме в таких фізичних умовах працюють джерела електронів на основі ВТР [4, 9].

Викладення основного матеріалу дослідження

Постановка задачі. У загальному вигляді завдання інтерполяції граничної траєкторії короткофокусних електронних пучків було сформульовано в роботі [13]. Постановка цього завдання базується на фундаментальних принципах загальної фізики електронних пучків та потоків заряджених частинок, які були сформульовані в монографіях [10 – 12]. Головний принцип інтерполяційного описання граничної траєкторії електронного пучка полягає в тому, що залежність $r(h)$, де r – радіус пучка на поточній площині зрізу, а h – поперечна координата, зазвичай мають яружний характер з одним глобальним мінімумом в фокальній площині пучка. Окремий випадок складають електронні пучки з високою густиною потужності та малим діаметром, які, за умови їх проведення в іонізованому газі, мають пульсації радіусу в фокальній області з кількома максимумами та мінімумами. Причиною цих пульсацій є магнітне самофокусування пучка в іонізованому газі, або пінч-ефект [10, 12]. Такі пульсації притаманні довгофокусним електронним пучкам з потужністю більше сотень кВт за умови фокального діаметру порядку 10^{-6} м або менше та кута збіжності пучка, меншого за $0,1^{\circ}$. Електронні пучки з такими параметрами майже не використовуються в умовах масового виробництва та у даній роботі не розглядаються. Для інтерполяції відповідних пульсацій радіусу в фокальній області таких пучків слід використовувати інші алгебраїчні функції [10].

Для короткофокусних електронних пучків потужністю десятки – сотні кВт з фокальним діаметром одиниці мм, які формуються електронними гарматами ВТР, притаманним є яружний характер залежності $r(h)$ з одним глобальним мінімумом. Головною характерною особливістю таких функцій є їхня дзеркальна симетрія відносно фокальної площини h_{ϕ} , де радіус електронного пучка приймає мінімальне значення $r_{\phi} = r(h_{\phi})$. У математичній формі описана вище особливість записується у вигляді співвідношення [10 – 15]:

$$\frac{dr(h_{\phi}-\delta h)}{dh} = -\frac{dr(h_{\phi}+\delta h)}{dh}, \quad (1)$$

де δh – нескінченно мала зміна величини h .

У роботі [13] були розглянуті алгоритми лінійної та квадратичної інтерполяції граничної траєкторії електронного пучка за трьома відліковими точками, а також отримані аналітичні співвідношення для оцінки фокальних параметрів електронного пучка за функціями лінійної та квадратичної інтерполяції. Там же був розглянутий метод комбінованої інтерполяції граничної траєкторії електронного пучка за трьома точками, сутність якого полягає у тому, що в фокальній області пучка використовується параболічна інтерполяція, а за межами цієї області – лінійна. Особливості використання

цього методу полягають у тому, що серед трьох обраних базових точок шукається така, в якій радіус пучка має найменше значення, і тоді вона вважається точкою переходу від лінійної до параболічної інтерполяції. Крім цього, важливим є виконання співвідношення (1), а також умови спряження лінійної та параболічної функцій [10–15]:

$$\left(\frac{dr(h)}{dh}\right)_л \Big|_{h=h_c} = \left(\frac{dr(h)}{dh}\right)_п \Big|_{h=h_c}, \quad (2)$$

де h_c – точка спряження.

Зрозуміло, що з урахуванням виконання співвідношення (2), для аналізу функції, яка описує комбіновану інтерполяцію, можна використовувати відомі математичні методи теорії сплайнів [16]. У роботі [13] функція комбінованої інтерполяції була записана з використанням відомого математичного апарату арифметико-логічних виразів [17].

Також у роботі [13] вказується, що саме комбінована інтерполяція у разі оптимального вибору набору трьох базових точок дає найкращі результати щодо оцінки фокальних параметрів короткофокусних електронних пучків. Проте слід відзначити, що суттєвим недоліком цього методу є те, що, за відомим набором числових даних для яружної залежності, знайти точку h_c , в якій слід здійснювати перехід від лінійної до параболічної інтерполяції з урахуванням умови (2), вкрай важко, і єдиного алгоритму щодо пошуку такої точки в обчислювальній математиці не існує. Крім цього, у роботі [13] не було проведено тестування запропонованих методів інтерполяції відносно даних чисельного моделювання граничної траєкторії електронного пучка, які, для завдання інтерполяції, зазвичай можна вважати достовірними [16]. Тому метою даної роботи є порівняння точності різних методів інтерполяції граничної траєкторії електронного пучка, за умови його транспортування в іонізованому газі, відносно даних чисельного моделювання. Як один із можливих методів інтерполяції яружних залежностей, які за межами області мінімуму мають характер, близький до лінійного, запропоновані алгебраїчні функції, що являють собою корінь степені n з поліномів тієї самої степені. Тестування таких алгебраїчних функцій як функцій інтерполяції було проведено для значення $n = 2$, що відповідає трьом базовим точкам. Аналогічне завдання, щодо порівняння різних методів інтерполяції енергетичних параметрів потужних електронних пучків, було поставлено у роботі [17].

Математична модель граничної траєкторії електронного пучка за умови його проведення в іонізованому газі. Чисельне моделювання граничних траєкторій короткофокусних електронних пучків здійснювалось для значень прискорювальної напруги одиниці – десятки кВ та робочого тиску в області проведення пучка від часток до десятків Па. Слід відзначити, що зазвичай саме в таких фізичних умовах здійснюється транспортування короткофокусних електронних пучків, які формуються електронними гарматами ВТР, з розрядної камери гармати до технологічної камери, де розташовані вироби, що обробляються під дією електронного пучка [4, 9].

Для побудови фізико-математичної моделі граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка за таких умов необхідно враховувати такі фізичні ефекти, як іонізація залишкового газу електронами пучка, розсіювання електронів на атомах залишкового газу за моделлю Резерфорда, дефокусування пучка під дією власного просторового заряду електронів та його фокусування під дією просторового заряду іонів, магнітне самофокусування пучка в іонізованому газі, або пінч-ефект, а також розкид електронів пучка за швидкостями [10 – 12, 14, 15]. Узагальнена фізико-математична модель граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка за таких фізичних умов

розглядалась у роботах [14, 15] та може бути записана у вигляді наступної системи алгебро-диференціальних рівнянь [14, 15]:

$$n_{i0} = \sqrt{\pi} r_{\Pi}^2 B_i p n_e \sqrt{\frac{M \varepsilon_0 n_e}{m_e U_{\text{пр}}}} \exp\left(-\frac{U_{\text{пр}}}{\varepsilon_0 n_e r_{\Pi}^2}\right); \quad f = \frac{n_e}{n_{i0} - n_e}; \quad C = \frac{I_{\Pi}(1-f-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m_e} U_{\text{пр}}^{3/2}}};$$

$$\frac{d^2 r_{\Pi}}{dz^2} = \frac{C}{r_{\Pi}}; \quad \theta = \frac{dr_{\Pi}}{dz} + \theta_s; \quad n_e = \frac{I_{\Pi}}{\pi r_{\Pi}^2}; \quad v_e = \sqrt{\frac{2eU_{\text{пр}}}{m_e}}; \quad (3)$$

$$\tan\left(\frac{\theta_{\min}}{2}\right) = \frac{10^{-4} Z_a^{4/3}}{2\gamma\beta^2}; \quad \tan\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) = \frac{Z_a^{3/2}}{2\gamma\beta^2}; \quad \bar{\theta}^2 = \frac{8\pi r_{\Pi}^2 n Z_a^2 dz}{\beta^4 \gamma^2} \ln\left(\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}}\right); \quad \gamma = \sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}},$$

де I_{Π} – струм електронного пучка, r_{Π} – радіус електронного пучка, $U_{\text{пр}}$ – прискорювальна напруга, f – рівень іонізації залишкового газу, n_e – концентрація електронів пучка, n_{i0} – концентрація іонів залишкового газу на осі симетрії пучка, m_e – маса електрона, ε_0 – діелектрична стала, $\beta = v_e/c$ – відношення усередненої швидкості електронів пучка v_e до швидкості світла c , θ_{\min} та θ_{\max} – мінімальний та максимальний кут розсіювання електронів на атомах залишкового газу відповідно, Z_a – заряд ядра атомів залишкового газу, n – концентрація атомів залишкового газу, dz – довжина пробігу електронів у поздовжньому напрямку на поточній ітерації, $\bar{\theta}$ – середній кут розсіювання електронів пучка, γ – релятивістський фактор, p – тиск залишкового газу, B_i – рівень іонізації газу.

У роботах [14, 15] розв’язувалось ускладнене завдання нелінійної електронної оптики, оскільки розглядалось проведення короткофокусного пучка через циліндричний канал з обмеженим перетином за умови забезпечення необхідного перепаду тиску між розрядною та технологічною камерою. Тобто, записана система рівнянь (3) є спрощеною та може бути використана лише для випадку, коли електронний пучок транспортується в іонізованому залишковому газі за умови однакового тиску. Результати моделювання граничної траєкторії електронного пучка з використанням системи рівнянь (3), наведені у графічному вигляді на рис. 1. Для розв’язування системи (3) був використаний ітераційний алгоритм, описаний в роботах [14, 15].

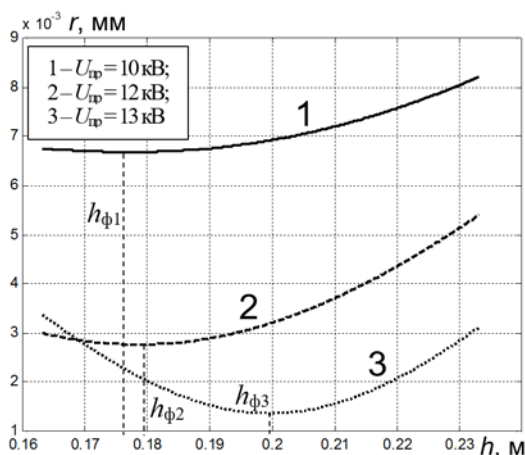


Рис. 1. Отримані результати моделювання граничної траєкторії електронного пучка для різної прискорювальної напруги. Фізичні умови: робочий газ – азот, тиск у технологічній камері – 0,1 Па, струм пучка – 0,5 Па.

З отриманих результатів моделювання, наведених на рис. 1, видно, що залежності $r(h)$ мають яружний характер з глобальним мінімумом на лінії фокусу пучка h_f , а за межами фокальної області ці залежності наближаються до лінійних. Розглянемо різні способи інтерполяції таких залежностей та проведемо оцінки точності інтерполяції.

Комбінована інтерполяція. У роботі [13] був розглянутий метод комбінованої інтерполяції, сутність якого полягає у тому, що за межами фокальної площини використовується лінійна інтерполяція, а в області фокуса пучка яружна залежність описується параболічною функцією. Оскільки передбачається, що залежності $r(h)$ є гладкими, описання цієї функції з використанням методу комбінованої інтерполяції проводилось з урахуванням вище наведеного співвідношення (2). З теоретичної точки зору це означає, що, з урахуванням дзеркальної симетрії функції $r(h)$, похідні інтерполяційної функції $r_{\text{кб}}(h)$ в точках $h_{c1} = h_{\text{ф}} - h_{\text{к}}$ та $h_{c2} = h_{\text{ф}} + h_{\text{к}}$ з правого та з лівого боку мають бути однаковими. Ця умова цілком відповідає положенням відомої теорії сплайнової інтерполяції [16].

З урахуванням умови (2) для трьох точок інтерполяції можна записати повну та зімкнену систему лінійних рівнянь, з яких визначаються коефіцієнти лінійної та параболічної функції [13]. Оскільки на інтервалі $[h_{c1}, h_{c2}]$ використовується параболічна інтерполяція, а за межами цього інтервалу – лінійна інтерполяція функції $r(h)$, аналітичний вираз для функції комбінованої інтерполяції $r_{\text{кб}}(h)$ можна записати з використанням відомого з теорії математичної логіки формалізму арифметико-логічних виразів [18]. У роботі [13] для трьох базових точок інтерполяції з координатами $P_1 = (h_1, r_1)$, $P_2 = (h_2, r_2)$ та $P_3 = (h_3, r_3)$ для функції $r_{\text{кб}}(h)$ були отримані наступні аналітичні співвідношення:

$$r_{\text{кб}}(h) = \left((h > h_{c2}) \vee (h < (2h_{\text{кф}} - h_{c2})) \right) \cdot p(h) + \left((h \leq h_{c2}) \vee (h \geq (2h_{\text{кф}} - h_{c2})) \right) \cdot r_{\text{л}}(h),$$

$$p(h) = C_{\text{к2}}h + C_{\text{к1}}h + C_{\text{к0}}, \quad C_{\text{к2}} = \frac{k}{2(h_{c2} - h_{\text{кф}})}; \quad C_{\text{к1}} = k \cdot \left(1 - \frac{h_{c2}}{2(h_{c2} - h_{\text{кф}})} \right); \quad (4)$$

$$C_0 = r_{c1} - C_{\text{к2}}h_{c1}^2 - C_{\text{к1}}h_{c1}; \quad r_{c1} = \min(r_1, r_2, r_3); \quad r_{\text{л}}(h) = |k(h - h_{\text{кф}})| + r_{\text{кф}};$$

$$k = \frac{r_1 - r_2}{h_1 - h_2}; \quad h_{\text{кф}} = \frac{1}{2} \cdot \left(h_3 + h_2 + \frac{r_3 - r_2}{k} \right); \quad r_{\text{кф}} = \frac{kh_2 + 3 \cdot (r_3 + k \cdot h_3)}{2} - r_2;$$

де $h_{\text{кф}}$ – положення фокусу електронного пучка, $r_{\text{кф}}$ – його фокальний радіус, r_{c1} – радіус електронного пучка у точці спряження h_{c1} , тобто $r_{c1} = r(h_{c1})$.

Результати комбінованої інтерполяції, з використанням співвідношень (4), числових даних, отриманих в результаті чисельних розрахунків граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка в іонізованому газі з використанням співвідношень (3) та наведених у графічному вигляді на рис. 1, будуть наведені у наступному розділі статті.

Інтерполяції яружних залежностей з використанням відповідного класу алгебраїчних функцій. Як було відзначалося раніше, головним недоліком описаного у попередньому підрозділі методу комбінованої інтерполяції є складність пошуку положення точок спряження h_{c1} та h_{c2} , яке забезпечує мінімальну похибку інтерполяції. Крім цього, лінійні та параболічні залежності не завжди правильно описують яружні залежності, які відповідають граничним траєкторіям короткофокусних електронних пучків за умови транспортування пучка в іонізованому залишковому газі.

Іншим підходом до інтерполяції граничної траєкторії короткофокусних електронних пучків є використання спеціальних класів алгебраїчних функцій. Головною особливістю таких функцій має бути те, що за межами області мінімуму вони повинні бути близькими до лінійних. З теорії математичних функцій відомо, що саме така властивість притаманна функціям, які описуються як корінь степені n із поліномів відповідної степені [16, 19], тобто:

$$r(h) = \sqrt[n]{C_n h^n + C_{n-1} h^{n-1} + \dots + C_2 h^2 + C_1 h + C_0}, \quad (5)$$

де C_0, \dots, C_n – поліноміальні коефіцієнти, які визначаються як результат розв’язування системи лінійних рівнянь:

$$C_n h_i^n + C_{n-1} h_i^{n-1} + \dots + C_2 h_i^2 + C_1 h_i + C_0 = r_i^n, \quad i \in [0, \dots, n]. \quad (6)$$

Зрозуміло, що кількість рівнянь у системі (6), яка безпосередньо впливає із співвідношення (5), становить $n + 1$, тому значення n можна вважати порядком функції інтерполяції (5). Наприклад, у разі $n = 2$ функція (5) переписується у вигляді [20]:

$$r(h) = \sqrt{C_2 h^2 + C_1 h + C_0}. \quad (7)$$

Тоді кількість базових точок, яка забезпечує зімкнутість та несуперечливість системи рівнянь (8), також складає $n + 1$. Тобто, для випадку $n = 2$ слід брати 3 базові точки, як і для комбінованої інтерполяції. За таких умов система лінійних рівнянь (6) має наступний аналітичний розв’язок [20]:

$$k_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{h_2 - h_1}, \quad k_2 = \frac{r_3^2 - r_1^2}{h_3 - h_1}, \quad k_3 = \frac{h_2 + h_1}{h_3 - h_2}, \quad C_2 = \frac{k_2 - k_1}{h_3 - h_2}, \quad C_1 = k_1 - (k_2 - k_1)k_3; \\ C_0 = r_1^2 - \frac{k_2 - k_1}{h_3 - h_2} h_1^2 - (k_1 - (k_2 - k_1)k_3)h_1. \quad (8)$$

Зрозуміло, що, у разі малого значення похибки інтерполяції, положення фокусу короткофокусного електронного пучка відповідає положенню мінімуму функції (7) для значень поліноміальних коефіцієнтів C_0, C_1 та C_2 , обчислених з використанням співвідношень (8). Враховуючи це, можна записати наступні аналітичні вирази для визначення положення фокусу електронного пучка та його фокального радіусу [20]:

$$h_{\phi 2} = -\frac{C_1}{2C_2}, \quad r_{\phi 2} = \sqrt{C_0 - \frac{C_1^2}{4C_2}}. \quad (9)$$

Розглянемо інший випадок. У разі $n = 3$ функція (5) записується наступним чином:

$$r(h) = \sqrt[3]{C_3 h^3 + C_2 h^2 + C_1 h + C_0}, \quad (10)$$

а аналітичні співвідношення для коефіцієнтів C_0, C_1, C_2 та C_3 , отримані як результат розв’язування системи рівнянь (7), записуються у наступному вигляді:

$$k_1 = \frac{r_3^3 - r_1^3}{h_3 - h_1}, \quad k_2 = \frac{r_2^3 - r_1^3}{h_2 - h_1}, \quad k_3 = \frac{r_4^3 - r_1^3}{h_4 - h_1}, \quad k_4 = \frac{h_2^2 - h_3^2 - h_3 h_1 + h_2 h_1}{h_2 - h_3}, \quad k_5 = \frac{h_2^2 - h_4^2 - h_4 h_1 + h_2 h_1}{h_2 - h_4}, \\ k_5 = \frac{r_2^3 - r_1^3}{h_2 - h_1}, \quad k_6 = \frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_4}, \quad C_3 = \frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_4}, \quad C_2 = k_1 - \frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_4} k_3; \\ C_1 = k_5 - (h_2^2 + h_2 h_1 + h_1^2)k_6 - (h_2 + h_1)(k_1 - k_6 k_3); \\ C_0 = r_1^3 - C_3 h_1^3 - C_2 h_1^2 - C_1 h_1. \quad (11)$$

Співвідношення для фокальних параметрів короткофокусного електронного пучка, у разі використання функції інтерполяції, заданої співвідношеннями (10, 11), можна записати наступним чином:

$$h_{f3} = -\frac{c_2}{3c_3}, \quad r_{f3} = \sqrt[3]{C_0 + \frac{2C_2^3}{27C_3^2} - \frac{C_1C_2}{3C_3}}. \quad (12)$$

Результати інтерполяції граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка з використанням співвідношень (7, 8) для трьох базових точок, у порівнянні з результатами комбінованої інтерполяції, для числових даних, отриманих в результаті чисельного розв'язування системи рівнянь (3) та наведених у графічному вигляді на рис. 1, будуть розглянуті у наступному розділі статті.

Результати інтерполяції граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка за трьома базовими точками. Результати комбінованої та поліноміальної інтерполяції для даних чисельного моделювання, отриманих з використанням співвідношень (3) та наведених у графічному вигляді рис. 1, для різних значень прискорювальної напруги наведені на рис. 2, там же колами відмічені обрані базові точки.

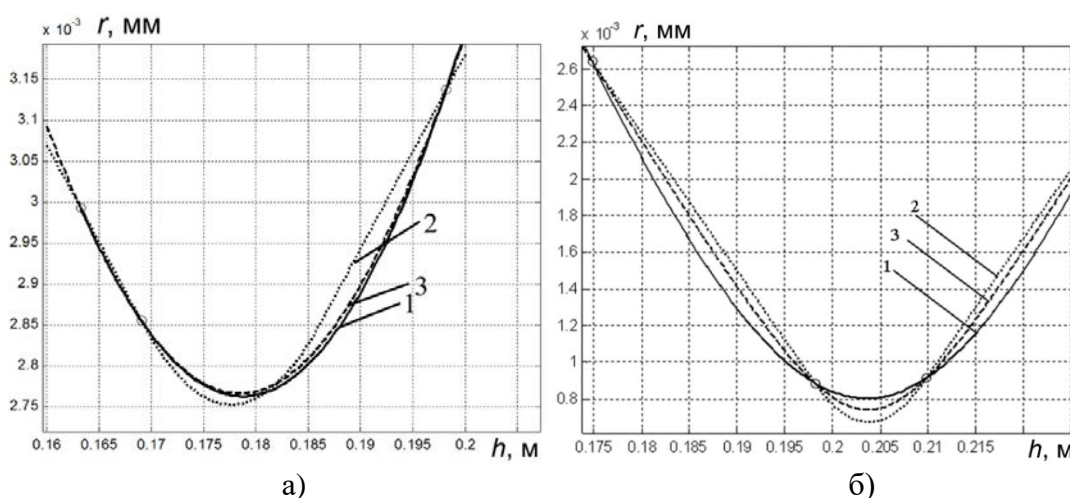


Рис. 2. Результати інтерполяції граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка для числових даних, наведених у графічній формі на рис. 1. 1 – результати чисельного моделювання, 2 – комбінована інтерполяція з використанням співвідношень (4), 3 – функціональна інтерполяція з використанням співвідношень (7, 8): а – $U_{пр} = 12$ кВ, б – $U_{пр} = 14$ кВ.

Із наведених графічних залежностей ясно видно, що інтерполяція з використанням співвідношень (7, 8) дає значно меншу похибку відносно даних чисельного моделювання, ніж комбінована інтерполяція. У табл. 2 наведені оцінки фокальних параметрів електронного пучка, проведені з використанням співвідношень (4) та (9).

Для проведення оцінки точного значення фокальних параметрів електронного пучка, за результатами чисельних розрахунків його граничної траєкторії, проведених з використанням системи алгебро-диференціальних рівнянь (3), використовувалось відоме співвідношення теорії числових алгоритмів та розв'язування екстремальних задач [19]:

$$r_f = \min(r_i), \quad h_f = \operatorname{argmin}(r_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (13)$$

де N – кількість дискретних точок у наборі числових даних, який аналізується.

Відносна похибка інтерполяції розраховувалась наступним чином [16]:

$$\varepsilon(h) = \frac{|p_{чис} - p_{інт}|}{p_{чис}} 100\%, \quad (14)$$

де $p_{\text{чис}}$ – результати чисельних розрахунків даного фокального параметру, які виконані з використанням співвідношення (13) та вважаються достовірними, $p_{\text{інт}}$ – результати інтерполяції, отримані з використанням співвідношень (4) та (9).

Таблиця 2

Результати оцінки фокальних параметрів короткофокусного електронного пучка з використанням різних методів інтерполяції

$U_{\text{пр}}, \text{кВ}$	Точне значення за результатами чисельного моделювання		Комбінована інтерполяція		Інтерполяція з використанням співвідношень (7, 8)	
			Отримане значення	Похибка, %	Отримане значення	Похибка, %
10	Положення фокусу, м	0,1772	0,1785	0,73	1,7680	0,22
	Фокальний радіус, мм	6,6813	6,4025	4,17	6,6492	0,48
12	Положення фокусу, м	0,17882	0,17765	0,65	0,17845	0,2
	Фокальний радіус, мм	2,7636	2,7538	0,35	2,7673	0,13
13	Положення фокусу, м	0,19957	0,19987	0,15	0,19943	0,07
	Фокальний радіус, мм	1,3633	1,2647	7,2	1,302	5
14	Положення фокусу, м	0,2035	0,20382	0,16	0,20372	0,11
	Фокальний радіус, мм	0,80316	0,674886	16	0,741285	7,7

З наведених у табл. 2 оцінок фокальних параметрів короткофокусного електронного пучка видно, що використання співвідношень (7, 8) дозволяє отримати досить точне значення як для положення фокусу, так і для діаметру електронного пучка в фокусі. Похибка таких оцінок, згідно із таблицею 2, не перевищує 7%, а у більшості випадків складає лише частку відсотків. У разі використання комбінованої інтерполяції похибка оцінки фокальних параметрів короткофокусного електронного пучка є значно більшою та для окремих випадків може досягати 16%.

Обговорення отриманих результатів. Проведені дослідження показали, що запропонований у роботі [13] метод комбінованої інтерполяції граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка дає значно більшу похибку, ніж використання алгебраїчних співвідношень (5), в яких поліноміальні коефіцієнти C_0, \dots, C_n визначаються через аналітичне розв’язування системи рівнянь (6). Тестові розрахунки були проведені для функції інтерполяції другого порядку, але отримані також аналітичні співвідношення (10–12) для функції інтерполяції третього порядку. Через розв’язування системи рівнянь (6) можливо також отримати аналітичні розв’язки для функцій інтерполяції (5) більш високих порядків. Проте підвищення порядку функції інтерполяції та, відповідно, кількості відлікових точок, не завжди веде до підвищення точності розв’язування задачі інтерполяції, а складність числових розрахунків за такої умови зазвичай непомірно зростає [16]. Дослідження можливості використання функцій інтерполяції (5) більш

високих порядків для розв'язування поставленого завдання інтерполяції граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка за умови його транспортування в іонізованому газі є предметом подальших, окремих теоретичних досліджень та тестових експериментів. Також окремим завданням є порівняння результатів числових оцінок за ітераційними співвідношеннями з експериментальними даними.

Висновки

Результати проведених теоретичних досліджень та тестових експериментів показали, що з двох розглянутих методів інтерполяції граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка за умови його проведення в іонізованому газі більш простим з обчислювальної точки зору є використання алгебраїчних функцій, заданих співвідношеннями (5, 6), але цей метод дає й меншу похибку інтерполяції. Тестові експерименти були проведені для трьох базових точок тобто, для значення порядку функції інтерполяції $n = 2$. Проте система лінійних алгебраїчних рівнянь (6) є універсальною та дозволяє отримати поліноміальні коефіцієнти C_0, \dots, C_n для функцій (5) будь-якого порядку. У статті наведені аналітичні співвідношення (10–12), які записані для випадку $n = 3$, та, відповідно, для чотирьох базових точок. Також отримані співвідношення (9, 12), за допомогою яких можна оцінювати фокальні параметри короткофокусного електронного пучка для функцій інтерполяції другого та третього порядків. З використанням співвідношень (13–14) обчислені похибки оцінювання фокальних параметрів електронного пучка відносно даних чисельних розрахунків.

Отримані в статті результати чисельного моделювання граничної траєкторії короткофокусних електронних пучків за умови їх транспортування в низькому вакуумі в іонізованому газі можуть бути ефективно використані для оцінки фокальних параметрів короткофокусних електронних пучків, які формуються електронними гарматами ВТР, на початковому етапі їх проектування гармати. У такому разі для пошуку базових точок інтерполяції використовується математична модель граничної траєкторії електронного пучка, записана у вигляді системи алгебро-диференціальних рівнянь (3).

Результати проведених комп'ютерних експериментів, щодо оцінювання фокальних параметрів короткофокусних електронних пучків, за умови їх проведення в іонізованому газі з компенсацією просторового заряду електронів пучка іонами залишкового газу, є вкрай цікавими для фахівців, які займаються розробкою сучасного електронно-променевого обладнання та його впровадженням у промислове виробництво.

Список використаної літератури

1. Рыкалин Н. Н., Зуев И. В., Углов А. А. Основы электронно-лучевой обработки материалов. Москва: Машиностроение, 1978. 239 с.
2. Шиллер З., Гайзиг У., Панцер З. Электронно-лучевая технология. Москва: Энергия, 1980. 528 с.
3. Электронно-лучевая сварка. Под общей редакцией Патона Б.Е. Киев: Наукова думка, 1987. 256 с.
4. Завьялов М. А., Крейндель Ю. Е., Новиков А. А., Шантурин Л. П. Плазменные процессы в технологических электронных пушках. Москва: Атомиздат, 1989. 256 с.
5. Лозовский В. Н., Константинова Г. С., Лозовский С. В. Нанотехнология в электронике. СПб.: Издательство «Лань», 2008. 336 с.
6. Kovalchuk D., Melnyk V., Melnyk I., Tugai B. Advanced Technical and Technological Solutions for Additive Manufacturing by e-Beam 3D Metal Printing. *Electrotechnics and Electronics*. 2018. Vol. 53. Issue 3-4. P. 60–68.
7. Krasik Y. E., Gleizer J. Z., Krokmal A., Chirko K. et al. High-Current Electron Sources Based on Gaseous Discharges. *Vacuum*. 2003. Vol. 77. № 4. P. 391–398.

8. Gruzdev V. A., Zaleski V. G., Antonovich D. A., Golubev V. P. Universal Plasma Electron Source. *Vacuum*. 2003. Vol. 77. № 4. P. 399–406.
9. Denbnovetskiy S., Melnyk V., Melnyk I., Tugai B., Tuhai S., Wojcik W., Lawicki T., Assambay A., Luganskaya S. Principles of Operation of High Voltage Glow Discharge Electron Guns and Particularities of its Technological Application. Proceedings of the *SPIE: The International Society of Optical Engineering*. (USA, Bellingham, August 7, 2017). Bellingham, pp. 10445–10455.
10. Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц. Москва: Мир, 1980. 438 с.
11. Молоковский С. И., Сушков Д. И. Интенсивные электронные и ионные пучки. Москва: Энергоатомиздат, 1991. 304 с.
12. Силадьи М. Электронная и ионная оптика. Москва: Мир, 1990. 640 с.
13. Мельник И. В., Починок А. В. Интерполяция граничной траектории электронного пучка в прифокальной области линейными и квадратичными функциями с использованием арифметико-логических выражений. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2019. Вип. 2 (69). Частина 2. С. 23–30.
14. Денбновецкий С. В., Мельник В. И., Мельник И. В., Тугай Б. А. Моделирование транспортировки короткофокусных электронных пучков из низкого в высокий вакуум с учетом разброса тепловых скоростей электронов. *Прикладная физика*. 2010. №3. С. 84–90.
15. Melnyk I. V. Methodic of Simulation of Guiding of Short-Focus Electron Beam in the Equipotential Transporting Channel of High Voltage Glow Discharge Electron Guns. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Радіофізика та електроніка*. 2015. № 1 (23). С. 57–62.
16. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. Москва: Наука, 1989. 432 с.
17. Починок А. В. Сравнение вычислительных методов определения энергии электронов по результатам дозиметрии. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2010. № 890. С. 187–194.
18. Мельник И. В. Анализ возможностей использования матричных макроопераций системы MatLab при решении прикладных задач. *Электронное моделирование*. 2009. № 3. С. 37–51.
19. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. 552 с.
20. Melnik I., Tugay S., Pochynok A. Interpolation Functions for Describing the Boundary Trajectories of Electron Beams Propagated in Ionised Gas. Proceedings of the *Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET – 2020): 15th International Conference*. (Lviv, February 25-29, 2020). Lviv: Lviv Polytechnic National University, 2020, pp. 79–83. URL: https://www.researchgate.net/publication/341248002_Interpolation_Functions_for_Describing_the_Boundary_Trajectories_of_Electron_Beams_Propagated_in_Ionised_Gas

References

1. Ryikalin, N. N., Zuev, I. V., & Uglov, A. A. (1978). *Osnovy elektronno-luchevoy obrabotki materialov*. Moskva: Mashinostroenie.
2. Shiller, Z., Gayzig, U., & Pantser, Z. (1980). *Elektronno-luchevaya tehnologiya*. Moskva: Energiya.
3. Paton, B. E. (Ed.). (1987). *Elektronno-luchevaya svarka*. Kiev: Naukova dumka.
4. Zavyalov, M. A., Kreyndel, Yu. E., Novikov, A. A., & Shanturin, L. P. (1989). *Plazmennyye protsessyy v tehnologicheskikh elektronnykh pushkakh*. Moskva: Atomizdat.

5. Lozovskiy V. N., Konstantinova G. S., & Lozovskiy S. V. (2008). *Nanotekhnologiya v elektronike*. Saint-Petersburg: Lan.
6. Kovalchuk, D., Melnyk, V., Melnyk, I., Tugai, B. (2018). Advanced Technical and Technological Solutions for Additive Manufacturing by e-Beam 3D Metal Printing. *Electrotechnics and Electronics*. **53**, 3-4, 60–68.
7. Krasik, Y. E., Gleizer, J. Z., Krokhmal, A., & Chirko, K. et al. (2003). High-Current Electron Sources Based on Gaseous Discharges. *Vacuum*. **77**, 4, 391–398.
8. Gruzdev, V. A., Zalesski, V. G., Antonovich, D. A., & Golubev, V. P. (2003). Universal Plasma Electron Source. *Vacuum*. **77**, 4, 399–406.
9. Denbnovetskiy, S., Melnyk, V., Melnyk, I., Tugai, B., Tuhai, S., Wojcik, W., Lawicki, T., Assambay, A., & Luganskaya, S. (2017). Principles of Operation of High Voltage Glow Discharge Electron Guns and Particularities of its Technological Application. Proceedings of the *SPIE: The International Society of Optical Engineering*. (USA, Bellingham, August 7, 2017). Bellingham, pp. 10445–10455.
10. Louison, Dzh. (1980). *Fizika puchkov zaryazhennykh chastits*. Moscow: Mir.
11. Molokovskiy, S. I., & Sushkov, D. I. (1991). *Intensivnyye elektronnyye i ionnyye puchki*. Moskva: Energoatomizdat.
12. Siladi, M. (1990). *Elektronnaya i ionnaya optika*. Moskva: Mir.
13. Melnik, I. V., & Pochinok, A. V. (2019). Interpolyatsiya granichnoy traektorii elektronnoho puchka v prifokalnoy oblasti lineynymi i kvadrachnyimi funktsiyami s ispolzovaniem arifmetiko-logicheskikh vyrazheniy. *Visnik Hersonskogo natsionalnogo tehniknogo universitetu*. **2** (69), Part 2, 23–30.
14. Denbnovetskiy, S. V., Melnik, V. I., Melnik, I. V., & Tugay, B. A. (2010). Modelirovanie transportirovki korotkofokusnykh elektronnykh puchkov iz nizkogo v vyisokiy vakuum s uchetom razbrosa teplovykh skorostey elektronov. *Prikladnaya fizika*. **3**, 84–90.
15. Melnyk, I. V. (2015). Methodic of Simulation of Guiding of Short-Focus Electron Beam in the Equipotential Transporting Channel of High Voltage Glow Discharge Electron Guns. *Visnyk Kyivskoho natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seria: Radiofizyka ta elektronika*. **1** (23), 57–62.
16. Samarskiy, A. A., & Gulin, A. V. (1989). *Chislennyye metody*. Moskva, Nauka.
17. Pochynok, A. V. (2010). Sravnenie vyichislitelnykh metodov opredeleniya energii elektronov po rezultatam dozimetrii. *Visnyk Harkivskogo natsionalnogo universitetu imeni V. N. Karazina. Seryia «Matematichne modelyuvannya. Informatsiyni tehnologiyi. Avtomatizovani systemy upravlinnya»*. **890**, 187–194.
18. Melnik, I. V. (2009). Analiz vozmozhnostey ispolzovaniya matrichnykh makrooperatsiy sistemyi MatLab pri reshenii prikladnykh zadach. *Elektronnnoye modelirovanie*. **3**, 37–51.
19. Vasilev, F. P. (1988). *Chislennyye metody resheniya ekstremalnykh zadach*. Moskva: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury.
20. Melnik, I., Tugay, S., & Pochynok, A. (2020). Interpolation Functions for Describing the Boundary Trajectories of Electron Beams Propagated in Ionised Gas. Proceedings of the *Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET – 2020): 15th International Conference*. (Lviv, February 25-29, 2020). Lviv: Lviv Polytechnic National University, pp. 79–83. Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/341248002_Interpolation_Functions_for_Describing_the_Boundary_Trajectories_of_Electron_Beams_Propagated_in_Ionised_Gas

Мельник Ігор Віталійович – д. т. н., професор, професор кафедри електронних пристроїв та систем, факультет електроніки Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», e-mail: imelnik@phbme.kpi.ua, ORCID: 0000-0003-0220-0615

Починок Аліна Володимирівна – к. т. н., доцент, доцент кафедри інформаційних систем та технологій Університет державної фіскальної служби України, Навчально-науковий інститут інформаційних технологій, м. Ірпінь, Київська область, e-mail: alina_pochynok@yahoo.com, ORCID: 0000-0001-9531-7593.