УДК 514.18

А.Ю. НИЦЫН
Харьковский технический университет «Харьковский политехнический институт»

ГРУППЫ СИММЕТРИИ ОРНАМЕНТА НА ЭСКИЗЕ М. К. ЭШЕРА «ЯЩЕРИЦЫ» И ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЕГО ФИГУРНОЙ ПЛИТКИ

Способы построения фигурных плиток, стилизующих изображения животных и растений и целиком заполняющих плоскость, не являются в настоящее время предметом научных исследований. Это объясняется тем, что авторы многих научных трудов рассматривают гравюры М. К. Эшера как мозаику, составленную из многоугольников с нанесённым на них повторяющимся рисунком. Поэтому они ищут в них фрагменты, которые вписываются в ромбы, квадраты, правильные треугольники или правильные шестиугольники, и с их помощью составляют мозаику. Мы же пошли другим путём – путём открытия законов симметрии, позволяющих построить плоскую фигуру, стилизующую образы растений и животных и заполняющую плоскость без наложений и пропусков.

Таким образом, цель статьи состоит в том, чтобы установить правило построения фигуры, стилизующей изображения животных и растений и заполняющей плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах и вращениях её повторений.

Предложено правило построения фигурных плиток, стилизующих изображения растений и животных и заполняющих плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах и вращениях её повторений, в частности фигурных плиток, обобщающих изображения зооморфных форм на эскизах М. К. Эшера «Ящерицы» и «Бабочки». Предложенное правило было применено для составления орнаментов, стилизующих эскизы М. К. Эшера «Ящерицы» и «Бабочки». Показано, что данные орнаменты имеют множество осей симметрии 3-го порядка, множество осей симметрии 6-го порядка и шесть векторов трансляции. Выявлена связь между движениями плоскости, приводящими к образованию фигурной плитки, и группой симметрии орнамента, полученного на её основе. Установлено, что симметрия орнамента и его повторяющаяся фигура описываются группами вращения 6-го порядка и группами параллельных переносов осей вращения. Следовательно, если какой-либо фигуре соответствует какая-либо группа преобразований плоскости, то такой же группе преобразований плоскости будет соответствовать орнамент, полученный параллельными переносами и вращениями её повторений. Разработан орнамент «Композиция № 1», не описанный в литературе по истории и теории орнамента. Предположено, что предметом дальнейших исследований будет приложение одной из кристаллографических групп симметрии Е. С. Фёдорова к построению фигурной плитки, стилизующей зооморфную форму на одной из гравюр М. К. Эшера.

Ключевые слова: мозаики, фигурные плитки в форме животных и растений, стилизация гравюр М. К. Эшера.

О.Ю. НІЦИН
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

ГРУПА СИМЕТРІЇ ОРНАМЕНТУ НА ЕСКІЗІ М. К. ЕШЕРА «ЯЩІРКИ» І РУХИ ПЛОЩИНІ, ЩО ОПИСУЮТЬ УТВОРЕННЯ ЙОГО ФІГУРНОЇ ПЛИТКИ

10.32782/2618-0340/2020.1-3.14

Способи побудови фігурних плиток, що стилізують зображення тварин і рослин і цілком заповнюють площину, не є на даний час предметом наукових досліджень. Це пояснюється тим, що автори багатьох наукових праць розглядають гравюри М. К. Ешера як мозаїку, складену з багатокутників з нанесеним на них малюнком, що повторюється. Тому вони шукають в них фрагменти, які вписуються в ромби, квадрати, правильні трикутники або правильні шестикутники, і за їх допомогою складають мозаїку. Ми ж пішли іншим шляхом – шляхом відкриття законів симетрії, що дозволяють побудувати плоску фігуру, що стилізує образи рослин і тварин і заповнює площину без накладень і пропусків.

Таким чином, мета статті полягає в тому, щоб встановити правило побудови фігури, що стилізує зображення тварин і рослин і заповнює площину без накладень і пропусків при паралельних перенесеннях і обертаннях її повторень.

Запропоновано правило побудови фігурних плиток, що стилізують зображення рослин і тварин і заповнюють площину без накладень і пропусків при паралельних перенесеннях і обертаннях її повторень, зокрема фігурних плиток, що узагальнюють зображення зооморфних форм на ескізах М. К. Ешера «Ящірки» і «Метелики». Запропоноване правило було застосовано для складання орнаментів, що стилізують ескізи М. К. Ешера «Ящірки» і «Метелики». Показано, що дані орнаменти мають множину осей симетрії 3-го порядку, множину осей симетрії 6-го порядку і шість векторів трансляції. Виявлено зв'язок між рухами площини, що приводять до утворення фігурної плитки, і групою симетрії орнаменту, отриманого на її основі. Встановлено, що симетрія орнаменту і його фігура, що повторюється, описуються групами обертання 6-го порядку і групами паралельних перенесень осей обертання. Отже, якщо якій-небудь фігурі відповідає будь-яка група перетворень площини, тоді такій же групі перетворень площини відповідатиме орнамент, отриманий паралельними переносами і обертаннями її повторень. Розроблено орнамент «Композиція № 1», не описаний в літературі з історії та теорії орнаменту. Передбачено, що предметом подальших досліджень буде застосування однієї з кристалографічних груп симетрії Є. С. Федорова до побудови фігурної плитки, що стилізує зооморфну форму на одній з гравюр М. К. Ешера.

Ключові слова: замощення площини, фігурні плитки у формі тварин і рослин, стилізація гравюр М. К. Ешера.

A.Yu. NITSYN
National Technical University 'Kharkov Polytechnic Institute'

ORGANENT SYMMETRY GROUP ON M. C ESHER'S SKETCH 'REPTILES' AND PLANE MOVEMENTS DESCRIBING THE FORMATION OF ITS FIGURED TILES

Methods for constructing figured tiles stylizing images of animals and plants and completely filling the plane are not currently the subject of scientific research. This is due to the fact that the authors of many scientific papers consider M. C. Escher's prints as a mosaic composed of polygons with a repeating pattern applied to them. Therefore, they look for fragments in them that fit into rhombuses, squares, regular triangles or regular hexagons, and with their help make a mosaic. But we went the other way – by opening the laws of symmetry, which allow us to build a flat figure stylizing the images of plants and animals and filling the plane without overlays and gaps.

Thus, the purpose of the article is to establish a rule for constructing a figure stylizing images of animals and plants and filling the plane without overlays and gaps with translations and rotations of its repetitions.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.14

A rule for constructing figured tiles stylizing images of plants and animals and filling the plane without overlays and gaps with parallel transfers and rotations of its repetitions, in particular, figured tiles in the form of zoomorphic shapes on M. C. Escher's sketches 'Reptiles' and 'Butterflies' is proposed. The proposed rule was applied to composition ornaments stylizing the M. C. Escher's sketches 'Reptiles' and 'Butterflies'. It is shown that these ornaments have set of symmetry axes of the 3rd order, set of symmetry axes of the 6th order and six translation vectors. The connection between the movements of the plane leading to the formation of a figured tile and the symmetry group of the ornament obtained on its basis is revealed. It was established that the symmetry of the ornament and its repetitive figure are described by 6th-order rotation groups and groups of translations of the rotation axes. Therefore, if any group of transformations of the plane corresponds to any figure, then the ornament obtained by translations and rotations of its repetitions will correspond to the same group of transformations of the plane. The ornament 'Composition No. 1' which is not described in the literature on the history and theory of ornament was developed. It is assumed that the subject of further research will be the application of one of the crystallographic symmetry groups of E. S. Fyodorov to the construction of a figured tile stylizing a zoomorphic shape on one of M. C. Escher's sketches.

Key words: tessellation of a plane, figured tiles in the form of animals and plants, stylization of M. C. Escher's prints.

Постановка проблемы

Будем называть фигурной плиткой плоскую фигуру, стилизующую изображения растений, животных и других предметов, созданных как природой, так и человеком, и заполняющую плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах, отражениях или вращениях её повторений. Решение задачи о заполнении плоскости фигурными плитками без наложений и пропусков является математической основой художественного конструирования облицовочной плитки, тканей, тротуарной плитки, обоев и других предметов прикладного искусства. Знание законов, по которым составляются фигурные плитки, не только объясняет построение существующих видов тротуарной плитки, но и способствует появлению неизвестных ранее геометрических форм, заполняющих плоскость без наложений и пропусков. Поэтому открытие закона, которому соответствует фигура, целиком заполняющая плоскость при параллельных переносах и вращениях её повторений, является актуальной задачей художественного конструирования.

Анализ последних исследований и публикаций

Нельзя сказать, что в настоящее время замощением плоскости никто не занимается. Наоборот, сейчас в зарубежной печати выходит довольно много работ, посвящённых паркетам. Чтобы получить представление о том, что замощение плоскости – это бурно развивающийся раздел геометрии, достаточно назвать имена таких широко известных в научном мире учёных, как Гарольд Скотт Кокстер, Роджер Пенроуз, Хайнц Фодерберг, Роберт Бёрджер, Джошуа Соколар, Джон Тейлор, Бранко Грюнбаум и Джеффри Колин Шепард [1–7]. Кроме того, в число прославленных во всём мире геометров следует включить и таких русских учёных, как Е. С. Фёдоров, А. В. Шубников и Н. В. Белов [8].

Однако в их работах рассматривается только один вид замощения плоскости, а именно: замощение плоскости одним или несколькими правильными или неправильными многоугольниками. Они открыли множество видов паркета. Например, правильные паркеты, состоящие из правильных многоугольников одного вида; полуправильные паркеты, составленные из правильных многоугольников двух или

10.32782/2618-0340/2020.1-3.14

более видов таким образом, чтобы для любых двух вершин паркета существовало преобразование симметрии, совмещающее одну вершину с другой. Полуправильные паркеты подразделяются на однородные паркеты, составленные таким образом, чтобы для любых двух его вершин существовало преобразование симметрии, переводящее одну вершину в другую, и на неоднородные паркеты, у которых последовательности многоугольников вокруг любых двух его вершин должны быть одинаковыми. Среди множества однородных паркетов выделяются квазиправильные паркеты, состоящие из многоугольников двух видов, чередующихся вокруг каждой его вершины таким образом, чтобы каждый многоугольник был окружён многоугольниками другого типа [1, 2]. Кроме того, существует бесконечное множество неоднородных паркетов, имеющих повторяющийся фрагмент, состоящий из нескольких многоугольников. Если фрагменты повторяются через равные расстояния с помощью двух параллельных переносов, то паркет называется периодическим, а если фрагменты повторяются через разные расстояния, то паркет называется непериодическим [1, 2]. К непериодическим паркетам относятся плитки Пенроуза с повторяющимся фрагментом, который первоначально состоял из плиток шести видов: трёх правильных пятиугольников, пятиконечной звезды, плитки в форме «лодочки» и ромба. Позже был открыт повторяющийся фрагмент, состоящий из двух плиток: выпуклого четырёхугольника в форме «воздушного змея» и вогнутого четырёхугольника в форме «наконечника дротика», а ещё позже был обнаружен повторяющийся фрагмент, состоящий из двух ромбов, имеющих равные стороны, но разные углы [1, 2].

Между тем как способы построения фигурных плиток, стилизующих изображения животных и растений и целиком заполняющих плоскость, не являются в настоящее время предметом научных исследований. Замечательный голландский художник Мауриц Корнелис Эшер (1898–1972) был единственным художником XX века, создававшим образы растений и животных, заполняющие плоскость без наложений и пропусков. Правда, несмотря на то, что М. К. Эшер соединял в своём творчестве геометрию и искусство, он был больше художником, чем геометром. Есть достоверные сведения, что М. К. Эшер вылепливал из пластилина фигурки растений и животных и менял их форму, если при перемещении их в плоскости листа бумаги обнаруживалось, что их контуры не совпадают [9]. Мы же пошли другим путём – путём открытия законов симметрии, позволяющих построить плоскую фигуру, стилизующую образы растений и животных и заполняющую плоскость без наложений и пропусков.

Цель исследования

Цель статьи состоит в том, чтобы открыть законы симметрии, позволяющие построить фигурную плитку, стилизующей изображения животных и растений и заполняющей плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах и вращениях её повторений.

Изложение основного материала исследования

Рассмотрим построение фигуры, стилизующей зооморфную форму на эскизе М. К. Эшера «Ящерицы» [10].

Мы нашли удивительно простое правило построения фигуры, стилизующей зооморфную форму на эскизе М. К. Эшера «Ящерицы» (1942). Однако мы не можем дать его описание, потому что согласно «Положению об открытиях, изобретениях и рационализаторских предложениях» решение признаётся новым, если до даты приоритета заявки сущность этого или тождественного решения не была раскрыта в СССР или за границей для неопределённого круга лиц настолько, что стало возможным

10.32782/2618-0340/2020.1-3.14

его осуществление. Несмотря на то, что «Положение…» было принято 21 августа 1973 года, его действие на территории Украины не прекращено.

Покажем на рис. 1 орнамент, стилизующий эскиз М. К. Эшера «Ящерицы». Орнамент обладает вращательной и трансляционной симметриями. Элементами вращательной симметрии является множество осей симметрии 6-го порядка, проходящих через точки, в которых сходятся 6 зооморфных форм. Кроме того, орнамент обладает вращательной симметрией 3-го порядка. Элементами симметрии является множество осей симметрии 3-го порядка, проходящих через центры правильных треугольников, вершинами которых являются центры групп зооморфных форм. Элементами трансляционной симметрии являются 6 векторов трансляции, проходящими через вершины правильных шестиугольников, в которые вписываются группы зооморфных форм.

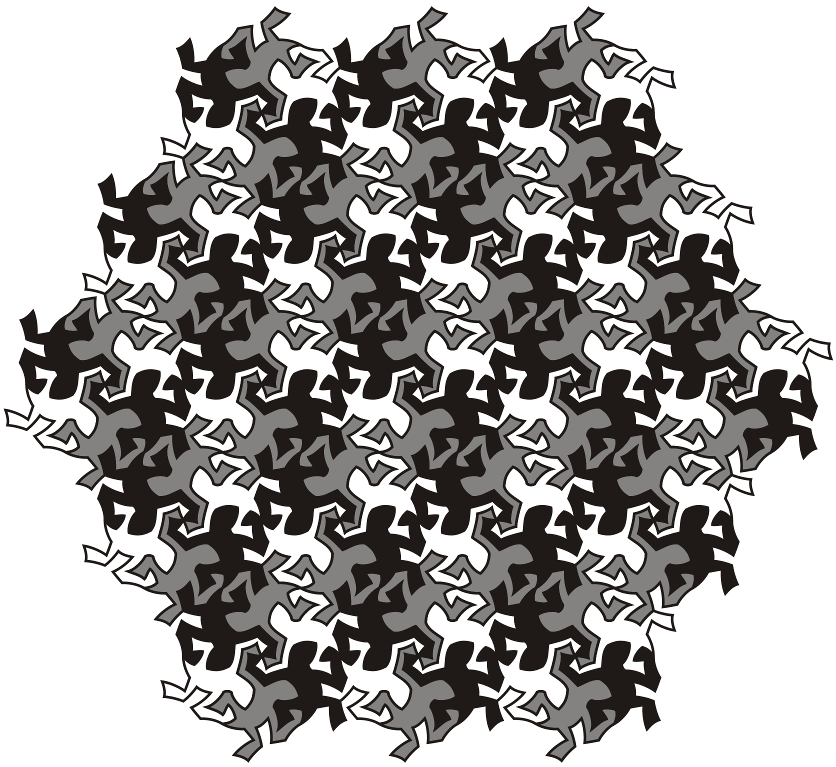

Рис. 1. Орнамент, стилизующий эскиз М. К. Эшера «Ящерицы», и его повторяющаяся фигура.

Предложенное правило было применено при построении фигуры, стилизующей зооморфную форму на гравюре М. К. Эшера «Бабочки» (1950). Полученный на её основе орнамент отличается от предыдущего тем, что центры правильных шестиугольников, в которых соприкасаются зооморфные формы, не располагаются на продолжениях радиусов окружности, описанной вокруг исходного правильного шестиугольника.

Покажем на рис. 2 орнамента, стилизующий гравюру М. К. Эшера «Бабочки». Орнамент обладает вращательными симметриями 6-го и 3-го порядков. Кроме того, орнамент обладает трансляционной симметрией. Элементами симметрии являются 6 векторов трансляции, которые совпадают с прямыми линиями, проходящими через вершины правильных шестиугольников, в которые вписываются группы зооморфных форм.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.14

Применим найденное нами правило для составления орнамента, которому мы дали название «Композиция № 1». Несмотря на то, что предлагаемый нами орнамент имеет признаки мавританского стиля, он не повторяет ни один орнамент из Альгамбры – дворца мусульманских правителей Испании из династии Насридов (1230–1492) [11, 12]. Покажем на рис. 3 орнамент «Композиция № 1».

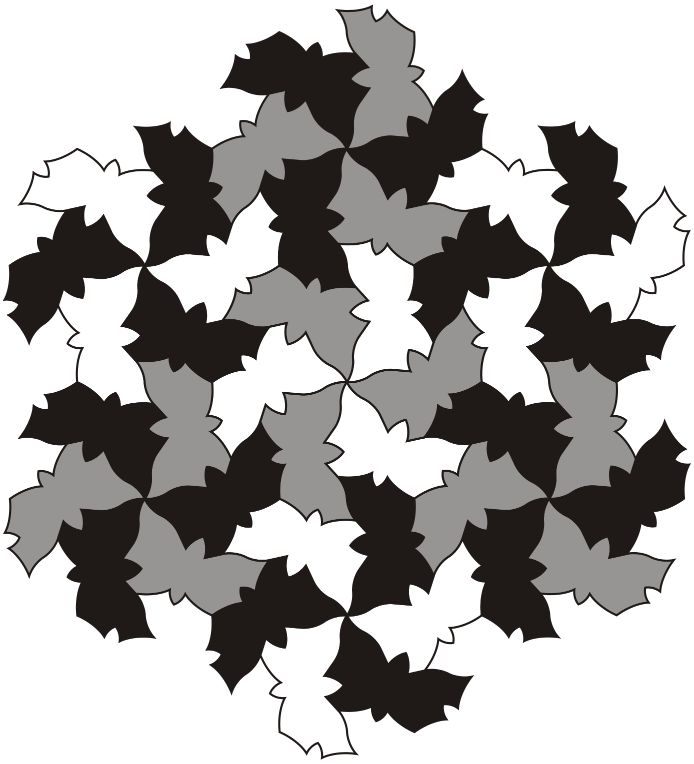

Рис. 2. Орнамент, стилизующий гравюру М. К. Эшера «Бабочки», и его повторяющаяся фигура.

Приведённые выше орнаменты наглядно доказывают, что найденное нами правило построения повторяющейся фигуры можно считать законом, которому подчиняются *все* орнаменты, удовлетворяющие следующим условиям:

- фигуры образуют группу, имеющую ось симметрии 6-го порядка;
- центры вращения группы фигур располагаются в центрах правильных шестиугольников. Причём центры правильных шестиугольников располагаются в вершинах правильных шестиугольников, вписанных в окружности, диаметры которых образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной диаметру исходной окружности;
- группы фигур можно совместить друг с другом, если параллельные переносы осуществляются в направлениях, заданных прямыми линиями, проходящими через вершины правильных шестиугольников, на расстояния, равные диаметру исходной окружности.

Обратим внимание на связь, существующую между орнаментом, стилизующим эскиз М. К. Эшера «Ящерицы», и его повторяющейся фигурой. Связь состоит в том, что и симметрия орнамента, и его повторяющаяся фигура описываются группами вращения 6-го порядка и группами параллельных переносов осей вращения. Отсюда следует, что если какой-либо фигуре соответствует какая-либо группа преобразований плоскости, то такой же группе преобразований плоскости будет соответствовать орнамент, полученный параллельными переносами и вращениями её повторений.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.14

Выводы

Таким образом, в статье предложено правило построения фигурных плиток, стилизующих изображения растений и животных и заполняющих плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах и вращениях её повторений, в частности фигурных плиток, обобщающих изображения зооморфных форм на эскизах М. К. Эшера «Ящерицы» и «Бабочки». Предложенное правило было применено для составления орнаментов, стилизующих эскизы М. К. Эшера «Ящерицы» и «Бабочки». Показано, что данные орнаменты имеют множество осей симметрии 3-го порядка, множество осей симметрии 6-го порядка и шесть векторов трансляции. Выявлена связь между движениями плоскости, приводящими к образованию фигурной плитки, и группой симметрии орнамента, полученного на её основе. Разработан орнамент «Композиция № 1», не описанный в литературе по истории и теории орнамента. Предположено, что наша следующая работа будет посвящена приложению одной из кристаллографических групп симметрии Е. С. Фёдорова к построению фигурной плитки, стилизующей зооморфную форму на одной из гравюр М. К. Эшера.

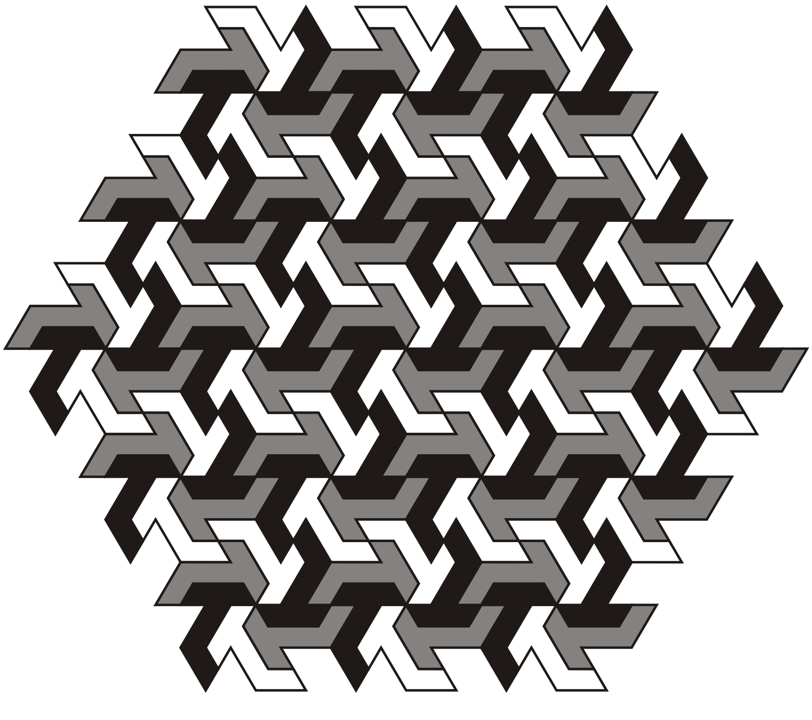

Рис. 3. Орнамент «Композиция № 1», разработанный автором.

Список использованной литературы

1. Coxeter H. S. M. Regular Polytopes. Tessellations and Honeycombs. New York: Dover Books on Mathematics, 1973. 368 p.
2. Grünbaum B., Shephard G. C. Tilings and Patterns. 2nd ed. New York: Dover Books on Mathematics, 2016. 700 p.
3. Raedschelders P. Tilings and Other Unusual Escher-Related Prints. *MC Escher's Legacy: A Centennial Celebration*. Berlin: Springer, 2005. P. 230–243.
4. Hofstadter Douglas. Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. New York: Basic Books, 1979. 752 p.
5. Gardner M. Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers and the Return of Dr. Matrix. New York: W. H. Freeman, 1989. 311 p.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.14

6. MC Escher's Legacy: A Centennial Celebration. (Ed. by Schattschneider D. and Emmer M.). Berlin: Springer, 2005. 489 p.
7. Кокстер Гарольд С. М. Введение в геометрию / пер. с англ. А. Б. Катка и С. Б. Катка; под ред. Б. А. Розенфельда и И. М. Яглома. Москва: Наука, 1966. 648 с.
8. Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве. Москва: Наука, 1972. 339 с.
9. Bool F. H., Kist J. R., Locher J. L., Wierda F. M. C. Escher: His life and complete graphic work. New York: Harry N. Abrams, 1982. 349 p.
10. Escher M. C. The World of M. C. Escher. (Ed. by J. L. Locher). New York: Harry N. Abrams, 1974. 235 p.
11. Орнамент всех времён и стилей : в 2 т. / пер. с франц. Б. П. Павлова / под ред. Т. И. Хлебнова. Москва : Арт-Родник, 2004. Т. 1 : Античное искусство, искусство Азии, Средние века. 270 с.
12. Орнамент всех времён и стилей : в 2 т. / пер. с франц. Б. П. Павлова / под ред. Т. И. Хлебнова. Москва : Арт-Родник, 2004. Т. 2 : Средневековое искусство, Ренессанс, XVII–XIX века. 248 с.

References

1. Coxeter H. S. M. (1973). Regular Polytopes. Tessellations and Honeycombs. New York: Dover Books on Mathematics.
2. Grünbaum B., Shephard G. C. (2016). Tilings and Patterns (2nd ed.). New York: Dover Books on Mathematics.
3. Raedschelders P. Tilings and Other (2005). Unusual Escher-Related Prints. *MC Escher's Legacy: A Centennial Celebration*. Berlin: Springer, pp. 230–243.
4. Hofstadter Douglas (1979). Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. New York: Basic Books.
5. Gardner M. (1989). Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers and the Return of Dr. Matrix. New York: W. H. Freeman.
6. Schattschneider D., & Emmer M. (Eds). (2005). MC Escher's Legacy: A Centennial Celebration. Berlin: Springer.
7. Kokster Garold S. M. (1966). Vvedenie v geometriyu / per. s angl. A. B. Katka i S. B. Katka; pod red. B. A. Rozenfelda s I. M. Yagloma. Moskva: Nauka.
8. Shubnskov A. V., Koptsik V. A. (1972). Simmetriya v nauke i iskusstve. Moskva: Nauka.
9. Bool F. H., Kist J. R., Locher J. L., Wierda F. (1982). M. C. Escher: His life and complete graphic work. New York: Harry N. Abrams.
10. Escher M. C. (1974). The World of M. C. Escher. (Ed. J. L. Locher), New York: Harry N. Abrams.
11. Hlebnova, T. I. (Ed). (2004). Ornament vseh vremen i stiley : v 2 t. Per. s frants. B. P. Pavlova. Moskva: Art-Rodnik.T. 1.: Antichnoe iskusstvo, iskusstvo Azii, Srednie veka.
12. Hlebnova, T. I. (Ed). (2004). Ornament vseh vremen i stiley : v 2 t. Per. s frants. B. P. Pavlova. Moskva: Art-Rodnik. T. 2: Srednevekovoe iskusstvo, Renessans, XVII–XIX veka.

Ницын Александр Юрьевич – д.т.н., профессор, профессор кафедры геометрического моделирования и компьютерной графики Харьковского технического университета «Харьковский политехнический институт», e-mail: dnitsyn@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7900-2612.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.14