УДК 519.6

Ю.І. ПЕРШИНА
Українська інженерно-педагогічна академія
В.О. ПАСІЧНИК
Харківської державної академії дизайну і мистецтв

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ РОЗРИВНИМИ ІНТЕРЛІНАЦІЙНИМИ СПЛАЙНАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРИКУТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Робота присвячена розробці методу наближення розривних функцій за допомогою оператора інтерлінації функцій двох змінних. Ці оператори відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх слідами на заданій системі ліній. Саме такі експериментальні дані використовуються в дистанційних методах, зокрема в комп'ютерній томографії. Тобто вони надають можливість будувати оператори, інтеграли від яких по вказаних лініях (лінійні інтеграли) будуть дорівнювати інтегралам від самої відновлюваної функції. Отже, інтерлінація – математичний апарат, природно пов'язаний із задачею відновлення характеристик об'єктів за їх відомими проекціями.

Існує багато практично важливих наукових та технічних галузей, в яких об'єкти дослідження математично описуються величинами, що зазнають розрив. Такі об'єкти часто виникають також і в задачах, які використовують дистанційні методи. На сьогоднішній день не існує загальної теорії описів явищ та процесів, що описуються розривними функціями. В статті будуються та досліджуються оператори розривної інтерлінації для наближення розривних функцій двох змінних за відомими її слідами (проекціями) на системі ліній з використанням довільних трикутних елементів. На основі створених сплайн-інтерлінантів будується метод наближення функцій, які мають розриви першого роду та область визначення яких розбивається на трикутні елементи. Причому побудовані розривні конструкції включають в себе, як окремий випадок, класичні неперервні інтерлінаційні сплани. В якості експериментальних даних виступають односторонні сліди функції на системі заданих ліній, саме такі дані використовуються в томографії. В роботі наведені теореми про інтерлінаційні властивості та похибку побудованих розривних конструкцій. Побудований метод наближення дозволяє наблизити розривну функцію, уникаючи явища Гіббса. Розглянуто приклади, які підтверджують ефективність запропонованого методу. Запропонований метод наближення розривних функцій можна буде використати для математичного моделювання розривних процесів в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Ключові слова: інтерлінація функцій, розрив першого роду, томографія, трикутні елементи.

Ю.И. ПЕРШИНА
Украинская инженерно-педагогическая академия
В.А. Пасечник
Харьковская государственная академия дизайна и искусств

ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ РАЗРЫВНЫМИ ИНТЕРЛИНАЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕУГОЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНЕТОВ

10.32782/2618-0340/2020.1-3.16

Работа посвящена разработке метода приближения разрывных функций с помощью оператора интерлинации функций двух переменных. Эти операторы восстанавливают функции (возможно, приближенно) по известным их следам на заданной системе линии. Именно такие экспериментальные данные используются в дистанционных методах, в частности, в компьютерной томографии. То есть они предоставляют возможность строить операторы, интегралы от которых по указанным линиям (линейные интегралы) равны интегралам от самой восстанавливаемой функции. Итак, интерлинация – математический аппарат, естественно связанный с задачей восстановления характеристик объектов по их известными проекциям.

Существует много практически важных научных и технических отраслей, в которых объекты исследования математически описываются величинами, терпящими разрыв. Такие объекты часто возникают также и в задачах, использующих дистанционные методы. На сегодняшний день не существует общей теории описаний явлений и процессов, описываемых разрывными функциями. В статье строятся и исследуются операторы разрывной интерлинации для приближения разрывных функций двух переменных по известным ее следам (проекциями) на системе линий с использованием произвольных треугольных элементов. На основе созданных сплайн-интерлинантов строится метод приближения функций, которые имеют разрывы первого рода, и область определения которых разбивается на треугольные элементы. Причем, построенные разрывные конструкции включают в себя, как частный случай, классические непрерывные интерлинационные сплайны. В качестве экспериментальных данных выступают односторонние следы функции на системе заданных линий, именно такие данные используются в томографии. В работе приведены теоремы об интерлинационных свойствах и погрешности построенных разрывных конструкций. Построенный метод приближения позволяет приблизить разрывную функцию, избегая явления Гиббса. Рассмотрены примеры, подтверждающие эффективность предложенного метода. Предложенный метод приближения разрывных функций можно будет использовать для математического моделирования разрывных процессов в медицинских, геологических, космических и других исследованиях.

Ключевые слова: интерлинация функций, разрыв первого рода, томография, треугольные элементы.

I.I. PERSHINA
Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy
V.O. PASICHNYK
Kharkov State Academy of Design and Arts

APPROXIMATION OF THE DISCONTINUOUS FUNCTION OF TWO VARIABLES BY DISCONTINUOUS INTERLINATION SPLINES USING TRIANGULAR ELEMENTS

The work is devoted to the development of a method for approximating discontinuous functions using the operator of interlination of two variables functions. These operators reconstruction functions (possibly approximately) from their known traces on a given line system. It is such experimental data that are used in remote remote methods, in particular, in computed tomography. That is, they provide an opportunity to build operators whose integrals over the indicated lines (linear integrals) will be equal to the integrals of the function being restored. So, interlination is a mathematical apparatus naturally associated with the task of restoring the characteristics of objects from their known projections.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.16

There are many practically important scientific and technical branches in which objects of research are mathematically described by values that have a discontinuity. Such objects often arise also in tasks using remote methods. To date, there is no general theory of descriptions of phenomena and processes described by discontinuous functions. The paper constructs and explores discontinuous interlination operators for approximating discontinuous functions of two variables according to its known traces (projections) on a system of lines using arbitrary triangular elements. On the basis of the created spline-interlinants, a method is constructed for approximating functions that have discontinuities of the first kind and whose domain of definition is divided into triangular elements. Moreover, the constructed discontinuous structures include, as a special case, the classic continuous interlination splines. The experimental data are one-sided traces of a function on a system of given lines; precisely such data are used in tomography. The paper presents theorems on interlining properties and errors of constructed discontinuous structures. The constructed approximation method allows us to approximate the discontinuous function, avoiding the Gibbs phenomenon. The examples confirming the effectiveness of the proposed method are considered. The proposed method for approximating discontinuous functions can be used for mathematical modeling of discontinuous processes in medical, geological, space and other studies.

Keywords: interlination of functions, discontinuity of the first kind, tomography, triangular elements.

Постановка проблеми

Задачі наближення гладких функцій неперервними конструкціями з достатньою повнотою розглянуті в роботах багатьох дослідників. Однак у багатьох прикладних задачах гладкі функції виникають лише як приємний виняток або як результат надмірної ідеалізації. Найчастіше ж об'єкти дослідження математично описуються функціями з розривами, зламами і іншими порушеннями гладкості. До подібних негладких функцій відносяться профілі ударних хвиль, що генеруються потужними акустичними випромінювачами, або форма барханів в пустелі мають характерні загострення.

Об'єкти, що зазнають розрив, також дуже часто виникають в задачах, що використовують дистанційні методи. Так, в дефектоскопії виявлення тріщин в промислових виробах за допомогою неруйнівного контролю є важливим завданням, як і визначення відхилень внутрішньої будови виробу від еталону. У багатьох задачах геофізики встановлення місця розташування кордонів, що розділяють блоки з різними фізичними властивостями, є першим етапом в подальших дослідженнях, спрямованих на визначення фізичних величин, що характеризують внутрішню будову Землі. У комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла.

Дана робота відноситься до серії робіт авторів, спрямованих на дослідження та удосконалення математичних моделей в комп'ютерній томографії. До теперішнього часу в томографії розроблено багато обчислювальних методів, алгоритмів і програмних засобів, спрямованих на відновлення внутрішніх властивостей об'єкта. Вони добре себе проявляють при відновленні об'єктів з гладкими властивостями, але дають незадовільні результати для об'єктів з розривними характеристиками. Тому виникає необхідність створення математичних методів наближення розривних функцій і методів виявлення точок і ліній розриву функцій для більш точного уявлення про структуру досліджуваного об'єкта.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.16

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Математичні основи томографії були закладені на початку минулого століття в роботах вченого Дж. Радона [1], який розробив теорію перетворення функцій багатьох змінних (перетворення Радона). Відповідно до цих перетворень функцію багатьох змінних можна охарактеризувати не тільки її значеннями в точках багатовимірного простору, але й інтегралами від цієї функції, взятими за нескінченний набір ліній.

Наближення розривної функції тригонометричними сумами Фур'є спричиняє явище Гіббса. Для боротьби з цим явищем було розроблено різні фільтри [2]. Однак згадані фільтри та методи не можуть повністю подолати явище Гіббса. Автори [3] запропонували методи реконструкції розривних ліній за допомогою вейвлетів. Faridani, Finch, Ritman, Smith [4] зробили подальший розвиток цієї методології та інструментів алгоритмічної реконструкції розривів у комп'ютерній томографії. Ramachandran, Lakshminarayanan and Ramm запропонували підходи, що дозволяють відновити не тільки безліч розривів, але і значення стрибків шляхом перетворення Радона [6]. Ці роботи засновані на прямому і оберненому перетворенні Радона.

Ні фільтри, ні згадані методи не дають повного усунення явища Гіббса. У роботах Россіні М. [7] розроблені методи відновлення розривних ліній за допомогою вейвлетів. Ці методи відновлення використовують полігармонічні вейвлети, які мають нескінченний носій. Цей тип конструкції може призвести до згладжування досліджуваного сигналу і вимагає додаткового аналізу отриманих результатів. У роботі А. Л. Агеєвої і Т. В. Антонова [8] запропоновано метод визначення кількості точок розриву та їх позицій на основі використання явища Гіббса. Але для цього потрібна додаткова інформація: найменші та найбільші значення стрибків наближеної функції. Також передбачається, що інтервали, в яких знаходяться явища Гіббса, не перетинаються, тобто неможливо відокремити близькі точки розриву одну від одної.

Серія праць авторів [9–10] присвячена розв'язанню плоскої задачі радонової комп'ютерної томографії з використанням неоднорідності внутрішньої структури двовимірного тіла. З цією метою доцільно використовувати оператори інтерлінації функцій, оскільки ці оператори відновлюють (можливо, наближені) функції за відомими їх слідами в заданій системі рядків. Вони дають можливість побудувати оператори, інтеграли яких з цих ліній (лінійні інтеграли) будуть дорівнювати інтегралам від найбільш відновлюваної функції. Тобто інтерлінація – це математичний апарат, природно пов'язаний із завданням відновлення характеристик об'єктів за відомими їх прогнозами. Ця стаття є продовженням цього циклу робіт.

В роботі [10] запропоновано метод відновлення розривної функції однієї змінної та алгоритм виявлення точок розриву. У роботах [11–12] представлений алгоритм виявлення ліній розриву, що дозволяє відновити розривні функції двох змінних за допомогою розривного апроксимаційного сплайну та прямокутних елементів. У публікації [10] запропоновано метод розв'язання 2D задачі комп'ютерної томографії з використанням неоднорідності внутрішньої структури. Для її розв'язання в роботі побудовано оператор розривної інтерлінації на основі відомих односторонніх слідів функції вздовж системи заданих взаємно перпендикулярних прямих.

Мета дослідження

У даній роботі побудуємо оператор розривної інтерлінації за відомими слідами функції двох змінних на системі довільних ліній, які не перетинаються в одній точці. В якості експериментальних даних виступають односторонні сліди (проекції) розривної функції на системі відомих довільних ліній, три з яких не перетинаються в одній точці. На основі цього оператора в майбутньому буде побудований метод наближення розривної функції, використовуючи тріангуляцію області визначення.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.16

Викладення основного матеріалу дослідження

Побудова оператора розривної інтерлінаці функції двох змінних, триангулюючи область визначення довільними трикутниками.

Нехай задано розривну функцію двох змінних $f(x,y)$ в області D. Будемо вважати, що область D розбивається на довільні трикутники. Трикутники не вкладаються один в один, а їх сторони не перетинаються. Функція $f(x,y)$ має розриви першого роду на границях між цими трикутними елементами (не обов'язково між усіма). Побудуємо оператор розривної поліноміальної інтерлінації, який в кожному трикутнику є оператором поліноміальної інтерлінації функції $f(x,y)$.

Розглянемо трикутний елемент $\mathrm{T}_i,\ i=\overline{1,n}$, сторони якого задаються рівняннями

$$\Gamma_k^i:\omega_k^i(x,y)=x\cdot\omega_{k1}^i+y\cdot\omega_{k2}^i-\gamma_k^i,\ k=1,3, i=\overline{1,n},\ \left(\omega_{k1}^i\right)^2+\left(\omega_{k2}^i\right)^2=1,$$

$$\Delta_{123}^i=\begin{vmatrix}\omega_{12}^i & \omega_{11}^i & -\gamma_1^i\\ \omega_{22}^i & \omega_{21}^i & -\gamma_2^i\\ \omega_{32}^i & \omega_{31}^i & -\gamma_3^i\end{vmatrix}\neq 0,\ \Delta_{k\ell}^i=\begin{vmatrix}\omega_{k1}^i & \omega_{k2}^i\\ \omega_{\ell 1}^i & \omega_{\ell 2}^i\end{vmatrix}\neq 0,\quad k\neq\ell,\ \tau_k^i=(\omega_{k2}^i,-\omega_{k1}^i),\ k=\overline{1,3}.$$

Нехай $A_{kl}^i=(x_{kl}^i,y_{kl}^i)$ – розв'язок систем рівнянь: $\omega_k^i(x,y)=0,\omega_\ell^i(x,y)=0$, $k\neq\ell,\ k,\ell=\overline{1,3}$, тобто це вершини заданого трикутника.

Вважаємо заданими сліди функції $f(x,y)$ на прямих Γ_k^i (під та над прямою відповідно) :

$$\varphi m_k^i(x,y)=f\left(x,(\gamma_k-x\omega_{k1})/\omega_{k2}-0\right),\quad \varphi p_k^i(x,y)=f\left(x,(\gamma_k-x\omega_{k1})/\omega_{k2}+0\right)\ \text{або}$$
$$\psi m_k^i(x,y)=f\left((\gamma_k-y\omega_{k2})/\omega_{k1}-0,y\right),\ \psi p_k^i(x,y)=f\left((\gamma_k-y\omega_{k2})/\omega_{k1}+0,y\right).$$

Теорема 1. Нехай $f(x,y)\in C^2(\mathrm{T}_i),\ i=\overline{1,n}$. Якщо сліди функцій $f(x,y)$ задовольняють у точках A_{kl}^i умови Нікольського [12], які можуть бути записані, наприклад, так

$$\varphi p_3^i(x_{13}^i,y)=\varphi m_1^i(x_{13}^i,y),\quad \varphi m_1^i(x_{12}^i,y)=\psi m_2^i(x,y_{12}^i),\quad \psi m_2^i(x,y_{32}^i)=\varphi p_3^i(x,y_{32}^i),$$

тоді оператор

$$\begin{aligned}O^i f(x,y)=&\frac{\omega_1^i(x,y)}{\omega_1^i(A_{23}^i)}\left(\psi m_2^i\left(A_{23}^i-\frac{\tau_2^i}{\Delta_{23}^i}\omega_3^i(x,y)\right)+\varphi p_3^i\left(A_{23}^i-\frac{\tau_3^i}{\Delta_{32}^i}\omega_2^i(x,y)\right)-\varphi p_3^i(A_{23}^i)\right)+\\ &+\frac{\omega_2^i(x,y)}{\omega_2^i(A_{13}^i)}\left(\varphi m_1^i\left(A_{13}^i-\frac{\tau_1^i}{\Delta_{13}^i}\omega_3^i(x,y)\right)+\varphi p_3^i\left(A_{13}^i-\frac{\tau_3^i}{\Delta_{31}^i}\omega_1^i(x,y)\right)-\varphi m_1^i(A_{13}^i)\right)+\\ &+\frac{\omega_3^i(x,y)}{\omega_3^i(A_{12}^i)}\left(\varphi m_1^i\left(A_{12}^i-\frac{\tau_1^i}{\Delta_{12}^i}\omega_2^i(x,y)\right)+\psi m_2^i\left(A_{12}^i-\frac{\tau_2^i}{\Delta_{21}^i}\omega_1^i(x,y)\right)-\psi m_2^i(A_{12}^i)\right)\end{aligned}\qquad(1)$$

10.32782/2618-0340/2020.1-3.16

є розривним інтерлінаційним сплайном в T_i і має такі властивості:

$$O^i f(x,y)\Big|_{\Gamma_1:\omega_1^i(x,y-0)=0} = \varphi m_1^i(x)\Big|_{\Gamma_1:\omega_1^i(x,y-0)=0}; \quad O^i f(x,y)\Big|_{\Gamma_2:\omega_2^i(x,y-0)} = \psi m_2^i(x)\Big|_{\Gamma_2:\omega_2^i(x,y-0)=0};$$

$$O^i f(x,y)\Big|_{\Gamma_3:\omega_3^i(x,y+0)=0} = \varphi p_3^i(x)\Big|_{\Gamma_3:\omega_3^i(x,y+0)=0}.$$

Теорема 2. Якщо $f(x,y)\in C^{(2,2)}(\mathrm{T}^i),\ i=\overline{1,n},$ то для залишку $R^i f(x,y)=(I-O^i)f(x,y)$ виконується рівність

$$R^i f(x,y) = \frac{\omega_1^i(x,y)}{\omega_1^i(A_{23}^i)} \int_0^{\omega_2^i(x,y)} \int_0^{\omega_3^i(x,y)} f^{(1,1)}\left(A_{23}^i - \frac{\tau_2^i}{\Delta_{23}^i}t_3 - \frac{\tau_3^i}{\Delta_{32}^i}t_2\right)dt_2 dt_3 +$$

$$+\frac{\omega_2^i(x,y)}{\omega_2^i(A_{13}^i)} \int_0^{\omega_1^i(x,y)} \int_0^{\omega_3^i(x,y)} f^{(1,1)}\left(A_{13}^i - \frac{\tau_1^i}{\Delta_{13}^i}t_3 - \frac{\tau_3^i}{\Delta_{31}^i}t_1\right)dt_1 dt_3 +$$

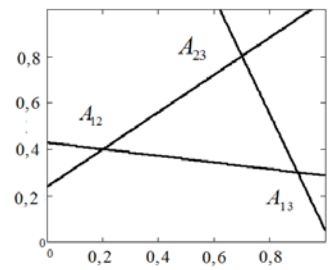
$$+\frac{\omega_3^i(x,y)}{\omega_3^i(A_{12}^i)} \int_0^{\omega_1^i(x,y)} \int_0^{\omega_2^i(x,y)} f^{(1,1)}\left(A_{12}^i - \frac{\tau_1^i}{\Delta_{12}^i}t_2 - \frac{\tau_2^i}{\Delta_{21}^i}t_1\right)dt_1 dt_2, \quad (x,y)\in \mathrm{T}^i.$$

Зауваження. Якщо односторонні сліди на одній лінії збігаються, то отримаємо неперервний інтерлінаційний сплайн.

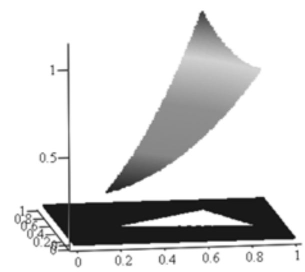
Приклад. Нехай областю визначення розривної функції $f(x,y)$ є трикутник Т (рис. 1), сторони якого задані рівняннями $\omega 1(x,y)=0,\ \omega 2(x,y)=0,\ \omega 3(x,y)=0$:

$$\omega 1(x,y) = \frac{x}{\sqrt{50}} + 7\frac{y}{\sqrt{50}} - \frac{3}{\sqrt{50}},\ \ \omega 2(x,y) = -4\frac{x}{\sqrt{41}} + 5\frac{y}{\sqrt{41}} - \frac{1{,}2}{\sqrt{41}},$$

$$\omega 3(x,y) = 5\frac{x}{\sqrt{29}} + 2\frac{y}{\sqrt{29}} - \frac{5{,}1}{\sqrt{29}}.$$



а



б

Рис. 1. Функція $f(x,y)$: *а* – область визначення; *б* – зображення.

Якщо розв'язати попарні системи вище наведених рівнянь, то отримаємо точки перетину сторін трикутника: $A_{12}(0,2;0,4),\ A_{23}(0,7;0,8), A_{13}=(0,9;0,3)$. А функцію $f(x,y)$ задамо наступним чином:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2,\ (x,y)\in \mathrm{T}, \\ 0, \qquad\quad (x,y)\notin \mathrm{T}. \end{cases}$$

10.32782/2618-0340/2020.1-3.16

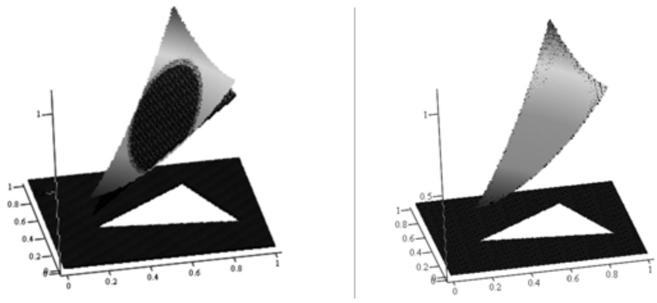
Отже, функція має розриви на лініях заданого трикутника і на цих лініях має наступні сліди (під та над лініями відповідно):

$$\varphi m_1(x,y)=0, \quad \varphi p_1(x,y)=1,02x^2-0.,22x+0,184,$$
$$\psi m_2(x,y)=0, \quad \varphi p_2(x,y)=2,56y^2-0,75y+0,09,$$
$$\varphi m_3(x,y)=7,25x^2-12,75x+6,5025, \quad \varphi p_3(x,y)=0.$$

Перевіримо виконання умов Нікольського:

$$\varphi p_1(x,y)\big|_{\omega 2(x,y-0)=0}=\psi\, m_2(x,y)\big|_{\omega 1(x-0,y)=0}=0,2\,,$$
$$\psi\, m_2(x,y)\big|_{\omega 3(x-0,y)=0}=\varphi\, p_3(x,y)\big|_{\omega 2(x,y-0)=0}=1,13\,,$$
$$\varphi\, p_2(x,y)\big|_{\omega 3(x+0,y)=0}=\varphi m_3(x,y)\big|_{\omega 1(x-0,y)=0}=0,9\,.$$

Таким чином, умови теореми 1 виконуються, і побудований за формулою (1) розривний інтерлінаційний сплайн наведено на рис. 2, *б*. На рис. 2, *а* для порівняння показано розривний інтерполяційний сплайн, що наближує ту саму розривну функцію.



а *б*

Рис. 2. Зображення заданої розривної функції $f(x,y)$ і розривних сплайнів:
***а* – інтерполяційного; *б* – інтерлінаційного**

Висновки

У статті представлено метод наближення розривної функції двох змінних за його відомими слідами в системі довільних ліній. Для цього був побудований розривний інтерлінаційний оператор з використанням трикутних елементів. Було показано, що побудований оператор інтерлінації наближає розривну функцію точніше, ніж класичний оператор інтерполяції. На основі цього оператора в майбутньому ми побудуємо метод наближення розривної функції, використовуючи тріангуляцію області визначення довільними трикутниками.

Список використаної літератури

1. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte Längs gewisser Manningfaltigkeiten. *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl.* 1917. Vol. 69. P. 262–277.
2. Lombardini R., Acevedo R., . Kuczala A, Keys K. P., Goodrich C. P. Higher-Order Wavelet Reconstruction/Differentiation Filters and Gibbs Phenomena. *Journal of Computational Physics*. 2016. № 15. P. 244–262.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.16

3. Suresh V., Koteswarao Rao S., Thiagarajan G., Das R.P. Denoising and Detecting Discontinuities Using Wavelets. *Indian Journal of Science and Technology*. 2016. № 9(19). P. 1–4.
4. Faridani A., Finch D. V., Ritman E. L., SmithK. T. Local Tomography. II. *SIAM J. Appl. Math.* 1997. Vol. 57 (4). P. 1095–1127.
5. Ramachandran G. N., Lakshminarayanan A. V. Three-Dimensional Reconstruction from Radiograph and Electron Micrographs: Application of Convolutions Instead of Fourier Transforms. *Proc. Nat. Acad. Sci. US*. 1971. № 68. P. 2236–2240.
6. Rossini M. Detecting Discontinuities in Two-Dimensional Signals Sampled on a Grid. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Apply Mathematics*. 2007. Vol. 1. № 1. P. 1–13.
7. Агеев А. Л., Антонова Т. В. Дискретный алгоритм локализации линий разрыва функции двух переменных. *Сиб. журн. индустр. матем.* 2017. Т. 20. № 4. С. 3–12.
8. Литвин О. М., Першина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням мішаної апроксимації. *Теорія та методи обробки сигналів: матеріали другої міжнародної конференції.* (Київ, травень 21-22, 2008). Київ: НАУ, 2008. С. 85–86.
9. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Першина Ю. І. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії: К.: Наук. думка, 2017. 314 с.
10. Литвин О. М., Першина Ю. І., Сергієнко І. В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы). *Кибернетика и системный анализ.* 2014. № 4. С. 126–134.
11. Литвин О. М., Першина Ю. І. Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайн-інтерлінантами з використанням трапецевидних елементів. *Таврійський вісник інформатики та математики.* 2011. № 2. С.59–70.

References

1. Radon, J. (1917). Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte Längs gewisser Manningfaltigkeiten. *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl*. **69**, 262–277.
2. Lombardini, R., Acevedo, R., Kuczala, A., Keys, K. P, & Goodrich, C.P. (2016). Higher-order Wavelet Reconstruction/Differentiation Filters and Gibbs Phenomena. *Journal of Computational Physics*. **15**, 244–262.
3. Suresh, V., Koteswarao, Rao S., Thiagarajan, G., & Das, R. P. (2016). Denoising and Detecting Discontinuities Using Wavelets. *Indian Journal of Science and Technology*. **9**(19), 1–4.
4. Faridani, A., Finch, D. V., Ritman, E. L., & Smith, K. T. (1997). Local tomography. II. *SIAM J. Appl. Math.* **57** (4), 1095–1127.
5. Ramachandran, G. N., & Lakshminarayanan, A. V. (1971). Three-Dimensional Reconstruction from Radiograph and Electron Micrographs: Application of Convolutions Instead of Fourier Transforms. *Proc. Nat. Acad. Sci. US*. **68**, 2236–2240.
6. Rossini, M. (2007). Detecting Discontinuities in Two-Dimensional Signals Sampled on a Grid. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Apply Mathematics*. **1**, 1, 1–13.
7. Ageev, A. L., & Antonova, T. V. (2017). Diskretnyiy algoritm lokalizatsii liniy razryiva funktsii dvuh peremennyih. *Sib. zhurn. industr. matem*. **20**, 4, 3–12.
8. Lytvyn, O.M., Pershyna, Yu.I. (2008) Matematychne modeliuvannia v kompiuternii tomohrafii z vykorystanniam mishanoi aproksymatsii. Proceedings of the *Teoriia ta metody obrobky syhnaliv: Materialy druhoi mizhnarodnoi konferentsii*. (Kyiv, May 21-22, 2008), Kyiv: NAU, pp. 85–86.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.16

9. Serhiienko, I. V., Zadiraka, V. K., Lytvyn, O. M., & Pershyna, Yu. I. (2017). Teoriia rozryvnykh splainiv ta yii zastosuvannia v kompiuternii tomohrafii: K. : Nauk. Dumka.
10. Litvin, O. M., Pershina, Yu. I., & Sergienko, I. V. (2014). Vosstanovlenie razryivnyih funktsiy dvuh peremennyih, kogda linii razryiva neizvestnyi (pryamougolnyie elementyi). *Kibernetika i sistemnyiy analiz*. **4**, 126–134.
11. Lytvyn, O. M., Pershyna, Yu. I. (2011). Nablyzhennia rozryvnykh funktsii dvokh zminnykh rozryvnymy splain-interlinantamy z vykorystanniam trapetsevydnykh elementiv. *Tavriiskyi visnyk informatyky ta matematyky*. **2**, 59–70.

Першина Юлія Ігорівна – д.ф.-м.н., доцент, професор кафедри інформаційний комп’ютерних технологій і математики Української інженерно-педагогічної академії, e-mail: yuliapershina78@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4719-8195.

Пасічник Валентина Олексіївна – к.т.н., доцент, завідувач кафедри «Дизайн тканин та одягу» Харківської державної академії дизайну і мистецтв,
e-mail: pasechnik.va@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5196-5301.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.16