

# КЕРУВАННЯ ФОРМОЮ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА РАХУНОК ВАРІЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ЗОВНІШНЬОГО ФОРМОУТВОРЮЮЧОГО НАВАНТАЖЕННЯ

УДК 514.182

## КОВАЛЬОВ Сергій Миколайович

д.т.н., професор, завідувач кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки  
Київського національного університету будівництва та архітектури.

**Наукові інтереси:** прикладна геометрія, дискретне геометричне моделювання об'єктів, процесів та явищ.

## БОТВІНОВСЬКА Світлана Іванівна

к.т.н., доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки  
Київського національного університету будівництва та архітектури.

**Наукові інтереси:** прикладна геометрія, геометричне моделювання, дискретна геометрія, геометричне моделювання в архітектурі та дизайні.

### ВСТУП

При проектуванні складних криволінійних поверхонь покриття в архітектурі широке використання знайшли дискретно представлені поверхні просторових конструкцій. Дискретизація архітектурних оболонок, в багатьох випадках, дозволяє виявити міцнісні характеристики конструкції, забезпечити конструктивно-розрахункові вимоги, наочно уявити вплив різноманітних зовнішніх чинників на форму поверхні у разі використання методу дискретного моделювання. Просторові покриття, які в силу своєї функціональної значущості і оригінальності зовнішньої форми, як правило, стають домінуючими у насколишній забудові проєктуються із підвищеними до них естетичними, технологічними, функціональними та конструктивними вимогами. При проектуванні найсучасніших криволінійних поверхонь покриття архітектори та дизайнери вдало та ефективно поєднують геометричну форму просторових конструкцій з дотриманням різноманітних умов та вимог, що необхідні для розрахунків на міцність і стійкість. Вибір геометричної форми, законів її зміни, управління та варіювання формою безментних оболонок покриттів дозволить визначити найкращий образ майбутньої споруди.

У статті наведено приклади можливого управління формою дискретно представлених поверхонь (ДПП) за рахунок варіювання параметрів зовнішнього формоутворюючого навантаження, в процесі моделювання дискретних каркасів архітектурних оболонок статико-геометричним методом (СГМ).

### МЕТА СТАТТІ

Для встановлення залежностей між геометричними та естетичними характеристиками криволінійних поверхонь в архітектурі, можна скористатись їх дискретними аналогами. Метою даної роботи є аналіз форми дискретного каркаса поверхні, управління нею під впливом різноманітного формоутворюючого навантаження, яке є джерелом вільних параметрів та залежностей між ними. Такий підхід надасть необмежену свободу в управлінні формою ДПП та спростить пошук нових сучасних архітектурних форм, які матимуть свою оригінальність та унікальність.

### АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Процес моделювання сучасних криволінійних конструкцій, на які впливають різні фізичні фактори навколишнього середовища, неможливо уявити без створення

їх дискретних моделей. В залежності від постановки геометричної задачі, за вихідні дані формування дискретної сітки, обирають: зовнішній вигляд оболонки, вид її напруженого стану (стисла або розтягнута оболонка), величину і характер діючого на вузли навантаження (в СГМ, мається на увазі формоутворюючого навантаження) та різноманітні крайові умови.

В даній роботі, для моделювання дискретних каркасів поверхонь, пропонується скористатись СГМ, математичний апарат якого не відрізняється від апарату методу скінчених різниць [1]. Основною ідеєю методу є моделювання дискретної сітки як рівноважної під дією зовнішніх зусиль. Причому, зусилля у в'язях повинні бути прямо пропорційними довжинам цих в'язей. Взаємодія зовнішніх зусиль, таких як надлишковий тиск, сила вітру, снігове навантаження, тощо та зусиль внутрішньої напруги, які виникають на модельованих поверхнях, в СГМ виглядає як сукупності зусиль, прикладених у вузлах сітки або виникаючих у в'язях. Дискретна математична модель поверхні [1] являє собою систему лінійних і нелінійних рівнянь, розв'язання якої дозволять визначити координати вузлів сітки, при яких всі зусилля знаходитимуться у рівновазі.

У багатьох роботах наведені приклади побудови дискретних каркасів поверхонь під впливом вертикальних зовнішніх зусиль з лінійним [2] та гіперболічним [3] законами розподілу величин векторів цих зусиль. В роботі [4] запропоновано нові принципи знаходження параметрів функції розподілу зовнішнього формоутворюючого навантаження, що діє на вузли ДПП, залежно від кроку дискретизації. Але, вплив параметрів положення зовнішніх зусиль на форму ДПП в цих роботах не розглядався.

На основі СГМ автором роботи [5] запропоновано побудову дискретних врівноважених неупорядкованих сіток, рівновага вузлів яких забезпечується за рахунок використання коефіцієнтів натягіння у в'язях. Такий підхід дозволить сформулювати безмоментні оболонки покриття із заданою в плані геометрією рисунку ребер на довільно заданому опорному контурі. Задачі формування дискретних каркасів поверхонь в архітектурі та дизайн-проектванні, питання варіювання форм об'єктів дизайну за рахунок використання різноманітних поверхонь-прообразів та моделювання поверхонь із заданими властивостями розглядалися в роботах

[6-9]. Але, порівняльний аналіз отриманих форм дискретних моделей поверхонь авторами не виконувався.

Ознакою сучасної архітектури є значна зацікавленість природними формами, оскільки саме естетичні характеристики геометрії форм живої природи дозволяють визначитись із критеріями естетичності криволінійних поверхонь покриття в архітектурі. В роботі [10] за допомогою СГМ моделюється дискретний каркас біоформи, в процесі її зростання за заданою траєкторією. Але, не розглядаються питання управління формою поверхні за рахунок використання зовнішнього формоутворюючого навантаження та зміни його параметрів.

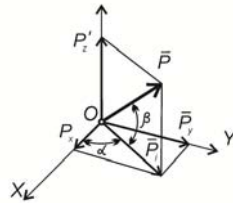


Рис. 1 Параметри вектора зовнішнього зусилля

Найбільш дослідженими на сьогодні залишаються аналітичні поверхні. При використанні таких поверхонь в архітектурі особливу увагу також приділяють пошуку оптимальних та раціональних форм як самих оболонок та їх елементів. В роботі [11] авторами знайдено оптимальне співвідношення стріли підйому параболоїду обертання до основи, показано наскільки важливим є вибір оптимальної форми. Доведено, що зменшення стріли підйому оболонки може призвести до значного зростання витрат на арматурні вироби. Але, ця стаття стосується лише аналітичних поверхонь, дискретні моделі безмоментних оболонок не розглядаються.

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Наведені у цій публікації приклади є продовженням досліджень, які були представлені в роботі [7], та спробою провести порівняльний аналіз форм дискретних каркасів поверхонь, отриманих в результаті варіювання параметрів зовнішніх зусиль які діють на вузли дискретної сітки.

Основна частина. При формоутворенні поверхонь у дизайні фізична уява зовнішнього формоутворюючого навантаження втрачає сенс, і тому збільшується число

параметрів такого навантаження за рахунку звільнення від параметрів, які залежать від того чи іншого фізичного явища. У такому разі, вектор кожного зусилля, яке діє на вузол, має три вільних параметри: два параметри напрямку зусилля (кути  $\alpha$  та  $\beta$ ) і довжина вектора зусилля (відрізок  $OP$ ) (рис. 1). Кожний з цих трьох параметрів може бути сталим, може залежати від одного або одразу двох параметрів  $i, j$  сітки:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= const, \bar{P} = f(i), \bar{P} = f(j), \bar{P} = f(i, j); \\ \alpha &= const, \alpha = f(i), \alpha = f(j), \alpha = f(i, j); \\ \beta &= const, \beta = f(i), \beta = f(j), \beta = f(i, j), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\bar{P}$  – вектор зовнішнього формоутворюючого навантаження,  $\alpha$  – кут між горизонтальною проекцією вектора зусилля та віссю  $Ox$ ,  $\beta$  – кут нахилу вектора зусилля до горизонтальної площини.

Різноманітні комбінації цих параметрів між собою породжують сполучення з повторенням  $\bar{C}_n^k$ , число яких можна підрахувати за формулою

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \bar{C}_4^3 = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = 364 \quad (2)$$

де  $\bar{C}_n^k$  – число поєднань параметрів з повторенням із  $n$  по  $k$  елементів,  $n=12$  – сумарне число елементів, які приймають участь у сполученнях з повтореннями із (1) та  $k=3$  – число поєднань елементів в сполученнях між собою. При використанні конструктивного (графічного) способу задавання кутових параметрів векторів зовнішніх зусиль їх координатні складові визначаються згідно з обраним способом.

Для більшої наочності можливостей керування формою дискретної сітки розглянемо деякі приклади побудови моделей поверхонь покриття з різними значеннями та напрямками зовнішніх зусиль, які можуть діяти на вузли сітки, різними типами клітин і на різних опорних контурах.

Приклад 1. Для першого варіанта цього приклада задано опорний контур у вигляді чотирьох однакових

півкіл у вертикальних площинах, паралельних координатним площинам  $XOZ$  та  $YOZ$ . Рівняння півкіл, відповідно, мають вигляд:  $x^2 + y^2 = 9, y = \pm 3$  та  $y^2 + z^2 = 9, x = \pm 3$ . На кожному півколі задано по сім вузлів з рівномірним кроком вздовж дуги. Топологічна схема сітки на квадратному плані  $6 \times 6$  лінійних одиниць (лін. од.) має чотирикутні клітини (рис. 2).

Напрямок векторів зовнішніх зусиль задано спільним центром точкою  $O(x_0 = 0; y_0 = 0; z_0 = 0)$  та вузлами правильної в плані сітки з квадратними клітинами, що лежить у горизонтальній площині  $\Gamma(z = 3)$ . Крок сітки  $t = 1$  лін. од.

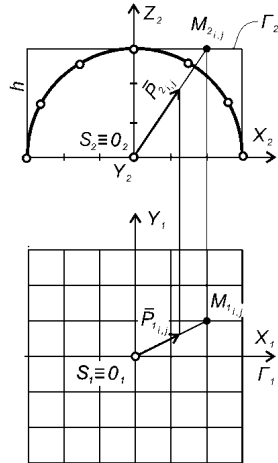


Рис. 2 Топологічна схема сітки та заданий опорний контур

Довжини векторів зусиль, що діють на вузли сітки, прийняті однаковими  $kP = const$ . Координатні складові векторів зусиль зовнішнього формоутворюючого навантаження підраховуються за формулами:

$$P_{x,i,j} = \frac{P \cdot i}{\sqrt{i^2 + j^2 + h^2}}; \quad P_{y,i,j} = \frac{P \cdot j}{\sqrt{i^2 + j^2 + h^2}}; \quad P_{z,i,j} = \frac{P \cdot h}{\sqrt{i^2 + j^2 + h^2}}, \quad (3)$$

де  $i, j$  – номер вузла дискретної сітки у локальній системі координат,  $P$  – величина зовнішнього зусилля, постійного для всіх вузлів сітки,  $h$  – висота положення площини  $\Gamma$ .

Симетрія заданих умов відносно вертикальних площин XOZ та YOZ дозволяє значно скоротити число рівнянь рівноваги вузлів:

$$\begin{aligned} x_{i-1,j} + x_{i+1,j} - 4x_{i,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1} + kP_{x,i,j} &= 0; \\ y_{i-1,j} + y_{i+1,j} - 4y_{i,j} + y_{i,j-1} + y_{i,j+1} + kP_{y,i,j} &= 0; \\ z_{i-1,j} + z_{i+1,j} - 4z_{i,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1} + kP_{z,i,j} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для виборів варіантів управління формою дискретно представлених поверхонь були виконані розрахунки при різних значеннях зовнішнього зусилля:  $kP' = 0,25P$  лін. од.;  $kP'' = 0,5P$  лін. од.;  $kP''' = P$  лін. од.

У всіх трьох випадках для визначення невідомих апікат вузлів сітки та коефіцієнтів  $k$ , пропорційності зусиль  $P$  довжинам в'язей, були складені системи рівнянь рівноваги вузлів (4) для 1/4 частини плану. Абсциси вузлів сітки визначені при підстановці до (4) знайдених коефіцієнтів  $k$ , а ординати вузлів визначено із умови симетрії сітки. За

отриманими результатами координат вузлів сітки на рис. 3, а, б, в, в побудовано дискретні каркаси змодельованих поверхонь при різних значеннях величини зовнішнього формоутворюючого навантаження.

З наведеного прикладу видно, що управління формою поверхні відбувається за рахунок зміни довжини вектора зовнішнього зусилля, який залишається однаковим для всіх вузлів сітки. З рис. 3 видно, що зміна довжини вектора впливає на стрілу підйому модельованих поверхонь (аплікату центрального вузла).

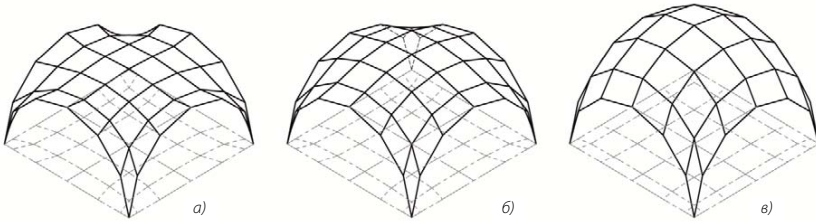


Рис. 3 Дискретні каркаси врівноважених поверхонь, змодельованих під впливом зовнішнього навантаження: а) зовнішнє зусилля –  $0,25P$  лін. од.; б) зовнішнє зусилля –  $0,5P$  лін. од.; в) зовнішнє зусилля –  $P = 1$  лін. од.

Розглянемо другий варіант цього прикладу. У цьому випадку центр  $O$ , який визначає напрямок зовнішніх зусиль, перенесено у точку  $C$  ( $x_C = -2; y_C = -2; z_C = 0$ ). Положення векторів зовнішніх

зусиль показано на рис. 4, а. Тоді, формули для розрахунку координатних складових зусиль приймають вигляд:

$$\begin{aligned} P_{x,i,j} &= \frac{P \cdot (i_M + 2)}{\sqrt{(i_M + 2)^2 + (j_M + 2)^2 + h^2}}; \quad P_{y,i,j} = \frac{P \cdot (j_M + 2)}{\sqrt{(i_M + 2)^2 + (j_M + 2)^2 + h^2}}; \\ P_{z,i,j} &= \frac{P \cdot h}{\sqrt{(i_M + 2)^2 + (j_M + 2)^2 + h^2}} \end{aligned} \quad (5)$$

Оскільки вихідні дані у цьому прикладі передбачають лише одну площину симетрії ( $x = y$ ) число рівнянь рівноваги (4), у порівнянні з попереднім прикладом, збільшиться до 50 рівнянь. За результатами розрахунків на рис. 4, б показаний дискретний каркас змодельованої поверхні. Такий варіант завдання напрямку векторів зовнішніх зусиль можна використо-

вувати на етапі ескізного проектування архітектурних оболонки під впливом вітрового навантаження.

Третій варіант обираємо таким, коли змінюється як напрямок вектора зусилля так і його довжина (для всіх вузлів сітки  $kP \neq const$ ). Напрямок вектора зусилля визначається так само, як було показано на рис. 2. А саме, координатні складові кожного з векторів

зусиль визначаються двома точками, одна з яких – це точка  $O$  ( $x_0 = 0; y_0 = 0; z_0 = 0$ ), а інша – точка  $M$ , яка збігається з відповідним вузлом сітки у площині  $\Gamma$  ( $z=3$ ). Тоді, координатні складові векторів зовнішніх зусиль визначаються за формулами:

$$kP_x = i; \quad kP_y = j; \quad kP_z = h, \quad (6)$$

де  $k = 0,3333$  – величина коефіцієнта пропорційності зусилля до довжини в'язі. Таке значення коефіцієнта прий-

мається для того, щоб апліката центрального вузла була сумірна з відповідними аплікатами вузлів сіток на рис. 3 та рис. 4. Система рівнянь рівноваги вузлів сітки тотожна системі (4) для першого варіанта у описаному прикладі. За результатами розрахунків побудовано дискретний каркас поверхні (рис. 5).

З рис. 5 видно, що сітка в плані, при використанні такого розподілу зовнішніх зусиль, матиме клітини правильної форми.

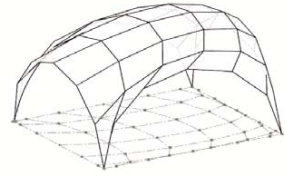
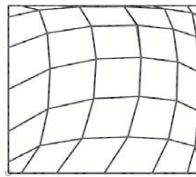
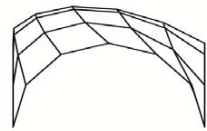
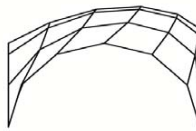
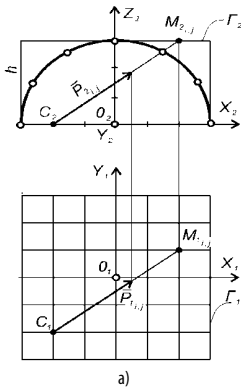


Рис. 4 Дискретний каркас поверхні, змодельований під дією зовнішнього навантаження. Центр векторів зовнішніх зусиль перенесено у точку  $C$ ; а) топологічна схема сітки та опорний контур; б) три проекції та диметрія дискретного каркаса зрівноваженої оболонки

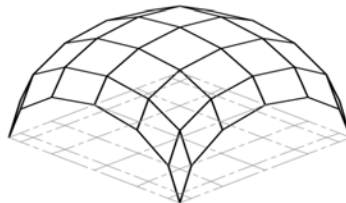
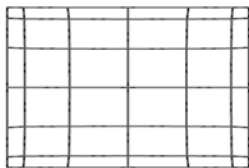
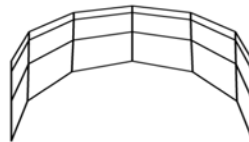
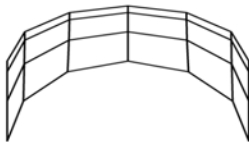


Рис. 5 Три ортогональні проекції та ізометрія дискретного каркаса зрівноваженої поверхні, яка змодельована під впливом неоднакових зовнішніх зусиль

Приклад 2. На рис.6 показано варіювання форми дискретної сітки з трикутними клітинами за рахунок зміни довжин векторів зовнішніх формуютьуючих зусиль, які залишаються однаковими для всіх вузлів сітки. Задано опорний контур у вигляді просторової ламаної лінії з шестикутним планом так, як показано на рис. 6, а. Напрямок векторів зусиль зовнішнього навантаження задано спільним центром

$O(x_0 = 0; y_0 = 0; z_0 = 0)$  і вузлами правильної сітки з трикутними клітинами, яка лежить у площині  $\Gamma (z = 3)$ . Контуром цієї сітки є такий саме шестикутник, як і у опорного контура в плані. Крок сітки дорівнює 1 лін. од., розмір радіуса кола, описаного навколо шестикутника, дорівнює 4 лін. од. Система відліку вузлів задана осями  $O_i, O_j$  так, як показано на рис. 6, а.

Рівняння рівноваги довільного вузла такої сітки:

$$\begin{aligned} x_{i-1,j-1} + x_{i-1,j} + x_{i,j-1} - 6x_{i,j} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j-1} + x_{i+1,j} + kP_{x,i,j} &= 0; \\ y_{i-1,j-1} + y_{i-1,j} + y_{i,j-1} - 6y_{i,j} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j-1} + y_{i+1,j} + kP_{y,i,j} &= 0; \\ z_{i-1,j-1} + z_{i-1,j} + z_{i,j-1} - 6z_{i,j} + z_{i,j+1} + z_{i+1,j-1} + z_{i+1,j} + kP_{z,i,j} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Система рівнянь рівноваги з урахуванням подвійної дзеркальної симетрії сітки налічує 30 рівнянь. Коор-

динатні складові векторів зовнішніх формуютьуючих зусиль, у цьому випадку, мають вигляд:

$$P_{x,i,j} = \frac{P \cdot (i - \frac{j}{2})}{\sqrt{(i - \frac{j}{2})^2 + j^2 + h^2}}; \quad P_{y,i,j} = \frac{P \cdot j}{\sqrt{(i - \frac{j}{2})^2 + j^2 + h^2}}; \quad P_{z,i,j} = \frac{P \cdot h}{\sqrt{(i - \frac{j}{2})^2 + j^2 + h^2}}. \quad (8)$$

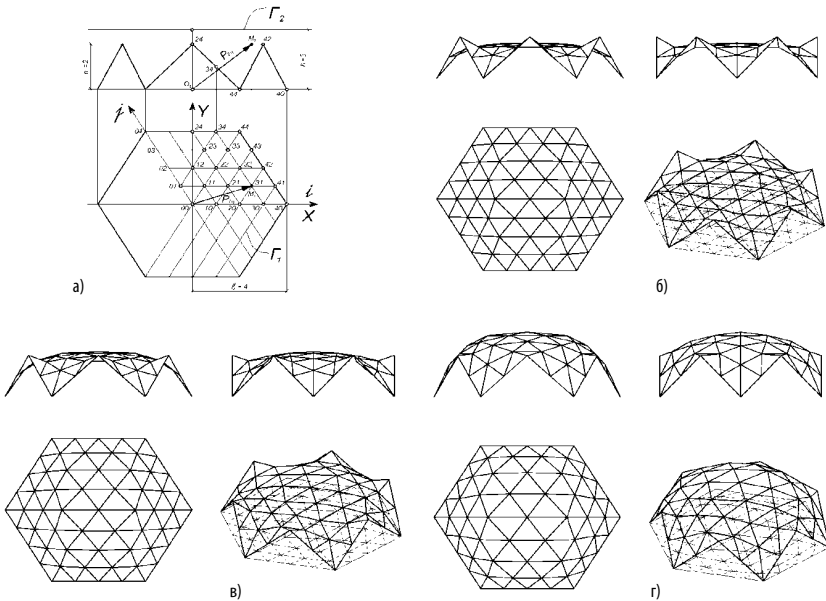


Рис. 6 Дискретні каркаси зрівноважених поверхонь, побудовані під впливом зовнішнього навантаження: а) топологічна схема сітки та опорний контур; б) зовнішнє навантаження  $0,25P$  лін. од;

На рис. б, в, г побудовано дискретні сітки врівноважених поверхонь, відповідно, при величинах зовнішніх зусиль:  $kP'' = 0,25P$  лін. од.;  $kP'' = 0,5P$  лін. од.;  $kP''' = 1,0$  лін. од.

В усіх наведених прикладах подальше керування формою безмоментної оболонки можна здійснювати за рахунок коефіцієнта пропорційності  $k$ , який можна вважати невідомим. Це дозволить призначити вузол, через який повинен проходити дискретний каркас поверхні, тобто задавати одну координату довільного вузла дискретної сітки як вихідну умову.

## ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ

Наведені в роботі приклади побудови дискретних каркасів врівноважених поверхонь довели, що використання трьох параметрів зовнішнього формоутворюючого навантаження, яке діє на вузли сітки, у різних сполученнях, дозволяє значно розширити можливості управління формою ДПП із заданими крайовими умовами на довільно заданих опорних контурах. Підтверджена перспективність використання СГМ для моделювання різноманітних дискретних сіток врівноважених поверхонь в архітектурі та дизайні, з урахуванням особливостей їх зорового сприйняття, накладених різноманітних обмежень та із збереженням естетичних характеристик модельованих поверхонь.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Mihailenko, V.E. Konstruivovanie form sovremennykh arhitekturnykh sooruzhenii [Tekst] / V.E.Mihailenko, S.N.Koval'ov. – К. : Budivel'nik, 1978. – 112 s., il.
2. Koval'ov, S.M. Formoutvoryuyucha rol' zovnishn'ogo navantajennya v statiko-geometrichnomu metodi [Tekst] / S.M.Koval'ov, O.I.Ahmatshina // Suchasni problemi modelyuvannya: zb. nauk. prac' / MDPU im. B.Hmel'nic'kogo; gol. red. kol. A.V.Naidish. – Melitopol': Vidavnicтво MDPU im. B.Hmel'nic'kogo, 2014. Vipusk 2 – S. 43 – 51.
3. Grischenko, V.G. Diskretnoe modelirovaniye poverhnoy obolochki s uchetom sovokupnosti geometricheskikh i staticheskikh formobrazuyuschih parametrov: avtoref. dis. na soiskanie nauchnoy stepeni kand. tehn. nauk: spec. 05.01.01 «Prikladnaya geometriya, injenernaya grafika» [Tekst] / V.G. Grischenko. – K. KISI, 1985. – 15 s.
4. Pustyl'ga, S.I., Samchuk, V.P. Zguschennya tochkovykh karkasiv diskretno predstavlenih krivykh za rahunokparametriv zovnishn'ogo formoutvoryuyuchogo navantajennya [Tekst] / S.I. Pustyl'ga, V.P. Samchuk // Mijvidomchii naukovu-tehnichniy zbirnik «Prikladna geometriya ta injenerna grafika». Vidpovidal'nyi redaktor V.E.Mihailenko. – K.: KNUBA, 2010, Vipusk 88 – S. 35 – 40.
5. Romanova Yu.V. Formuvannya rebristih bezmomentnih pokrittiv z zadanim malyunkom reber [Tekst] / Yu.V.Romanova // Suchasni problemi modelyuvannya: zb. nauk. prac' / MDPU im. B.Hmel'nic'kogo; gol. red. kol. A.V.Naidish. – Melitopol': Vidavnicтво MDPU im. B.Hmel'nic'kogo, 2014. Vipusk 2 – S. 124 – 129
6. Botvinov'ska, S.I. Formuvannya diskretnih poverhon' v arhitekturi ta dizain-proektuvanni // Problemi informacijnih tehnologij. – 2016. – №1(019). – S. 192 – 199.
7. Koval'ov, S.M. Vpliv parametriv zovnishnih zusil' na formu diskretnogo karkasa poverhni [Tekst] / S.M.Koval'ov, S.I.Botvinov'ska // Upravlinnya rozvitkom skladnih sistem. – 2016. – №28. – S. 137 – 141.
8. Botvinov'ska, S.I. Varyuvannya form ob'ektiv dizainu shlyahom vikoristannya riznih poverhon'-proobraziv [Tekst] / S.I.Botvinov'ska // Upravlinnya rozvitkom skladnih sistem. – 2017. – №30. – S. 136 – 141.
9. Koval'ov, S.M. Geometrichne modelyuvannya poverhon' iz zadanimi vlastivostyami u dizaini ta arhitekturi [Tekst] / S.M.Koval'ov, S.I.Botvinov'ska, A.V.Zolotova // Upravlinnya rozvitkom skladnih sistem. – 2016. – №25. – S. 121 – 126.
10. Kaschenko, O.V. Formuvannya v dizaini ta arhitekturi na osnovi modelyuvannya bioprototipiv: diss. ...d-ra tehn. nauk: 05.01.03 / O.V. Kaschenko. – K.: KNUBA, 2013. – 250 s.
11. Grimach, K.M. Podbor optimal'nykh parametrov ellipsoidnoy jelezobetonoj obolochki vrascheniya [Tekst] / K.M.Grimach, A.V. Kozlov, R.A.Proskurov // Mejdunarodnyi nauchno-issledovatel'skij jurnal: tehnicheskie nauki (chast' 3). – 2017. – №2(56).

**Рецензент:** д.т.н., проф., Плюский В.О.,  
Проректор з наукової роботи, КНУБА