ЕВРИСТИЧНІ ПІДХОДИ ДО АНАЛІЗУ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ПО ВИХІДНИМ СИГНАЛАМ

УДК 62.505

МАРАСАНОВ Володимир Васильович
Д.т.н., професор кафедри Технічної кібернетики, Херсонський національний технічний університет
Наукові інтереси: методи дослідження складних динамічних систем

ДИМОВА Ганна Олегівна
Старший викладач кафедри Технічної кібернетики, Херсонський національний технічний
Наукові інтереси: методи дослідження складних динамічних систем, прийняття рішень в умовах невизначеності

ВСТУП

Поставлена задача знаходження структури динамічного об'єкта за вихідним сигналом досліджувалася нами методом факторизації кореляційної матриці вихідного сигналу [1]. Розглянутий раніш метод і методи, що розглянуті в цієї статті, відносяться до зворотних задач дослідження динамічних систем, сутність яких заключається в тому, що вихідний спостережуваний сигнал являється рішенням динамічного оператора об'єкта, а структура самого оператора невідома. При цьому є деякі припущення про його клас: лінійний диференційний, нелінійний диференційний і диференційний в частинних похідних і т. д. [2, 3, 4].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Евристичний підхід ґрунтується на тому, що вхідний сигнал, діючий на об'єкт, опитує всі ступені свободи динамічного некерованого об'єкта. Таким вхідним сигналом, що має нескінчений спектр, є білий шум. Необхідно розглянути методику знаходження структури оператора і оцінку його параметрів для лінійного випадку та метод ідентифікації моделі багатомірної динамічної системи.

РІШЕННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо методику знаходження структури оператора і оцінку його параметрів для лінійного випадку на відносно простому прикладі.

Нехай сигнал $\mathbf{Y}_0(t)$ виходу автономного об'єкта описується звичайним диференційним рівнянням m-го порядку з постійними коефіцієнтами і стійкою точкою спокою $\mathbf{Y}_0 = 0$ [5]

$$\frac{d^m \mathbf{Y}_0(t)}{dt^m} + \sum_{m=0}^{m-1} a_m \frac{d^m \mathbf{Y}_0(t)}{dt^m} = 0 \qquad (1)$$

з початковими умовами

$$\left\{ \frac{d^m \mathbf{Y}_0(0)}{dt^m} \right\}, \quad m = 0,1,2,...,m-1.$$

Припустивши, для простоти, що рівняння (1) не має кратних коренів, отримаємо рішення

$$\mathbf{Y}_0(t) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{C}_i \exp(r_i t), \quad t \le 0 \qquad (2)$$

Характеристичний поліном рівняння (1)

$$a_m r^m + a_{m-1} r^{m-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0, \qquad (3)$$

де r_i – корені рівняння (1).

Рівняння (3) відображає структуру лінійного оператора (1) і встановлює взаємозв'язок між множиною коренів r_i та вектором коефіцієнтів $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ [2,4,5].

З іншої сторони, при кожному наборі коренів маємо m рівностей:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{C}_i r_i^{(m)} = \mathbf{Y}_0^{(m)}, \quad m = (0,1,...,m-1),$$

що однозначно зв'язують вектори $(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_m)$ та $(\mathbf{Y}_0^{(0)}, \mathbf{Y}_0^{(1)}, \ldots, \mathbf{Y}_0^{(m-1)})$.

Кожний запис сигналу $\mathbf{Y}_0(t)$ дозволяє знайти тільки ті значення r_i, для яких у відповідності з початковими умовами коефіцієнти $\mathbf{C}_i$ виявляться відмінними від нуля. Наша мета обчислити коефіцієнти a_i за записами $\mathbf{Y}_0(t)$. Тому можна враховувати, що кожний з векторів $(\mathbf{Y}_0^{(0)}, \mathbf{Y}_0^{(1)}, \ldots, \mathbf{Y}_0^{(m-1)})$, для якого всі $\mathbf{C}_i \neq 0$, дозволяє без додаткових збуджень досліджувати об'єкт, тобто одне таке початкове відхилення реалізує повний набір збуджень об'єкту. Враховуючи, що взяття різниці та знаходження похідної являються ізоморфними операціями, то можна перейти від рівняння (1) до різницевих рівнянь регресії шляхом перетворення вихідного сигналу об'єкта за допомогою операції квантування за часом (з урахуванням теореми Котельникова) та квантування за рівнем до часових рядів [1, 6, 7, 8].

Ізоморфізм моделей лінійних диференційних рівнянь та регресійних рівнянь може бути забезпечений при виконанні для рядів кінцевих різниць чотирьох умов Гауса-Маркова. Якщо кінцеві різниці i-го порядку не задовольняють вимогам випадковості i-х різниць: їх нормальному закону розподілення, рівності нулю їх середнього значення та відсутності суттєвих кореляцій, то необхідно перейти до (i + 1)-х кінцевих різниць (тобто до рівняння регресії більш високого порядку і знов перевірити умови Гауса-Маркова). Крім того, отримані числові ряди на кожному кроці необхідно перевіряти на наявність помилок (першого та другого роду) [9] методами Ірвіна, за критерієм Фішера, Фостера-Стьюарта та при відсутності грубих помилок для збільшення точності оператора моделі структури об'єкту провести згладжування часового ряду $y_1, y_2, \ldots, y_n$ [6, 10].

Для отримання оцінок коефіцієнтів характеристичного поліному (рівняння (3)) і визначення його порядку необхідно виконати наступні операції:

Знайти :

1-і різниці $\quad u_i^{(1)} = y_i - y_{i-1}$

2-і різниці $\quad u_i^{(2)} = u_i^{(1)} - u_{i-1}$

$\ldots$

k-і різниці $\quad u^{(k)} = u_i^{(k-1)} - u_{i-1}^{(k-1)}$.

Для всіх різницевих рядів, попередньо перевіривши їх на виконання умов Гауса-Маркова, знайти їх дисперсії:

для вихідного згладженого ряду

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2}{n-1} \qquad (4)$$

різницевих рядів k-го порядку (k = 1, 2, …)

$$\sigma_k^2 = \frac{\sum_{i=k+1} \left(u_i^{(k)} \right)^2}{(n-k) C_{2k}^k}, \qquad (5)$$

де C_{2k}^k – біноміальні коефіцієнти.

Визначити порядок регресійного рівняння шляхом порівняння $\left| \sigma_k^2 - \sigma_{k-1}^2 \right|$ з $0{,}1\sigma_{k-1}^2$, $0{,}05\sigma_{k-1}^2$, $0{,}01\sigma_{k-1}^2$ (у залежності від заданої точності); якщо ця величина не перевищує задану точність аналого-цифрового перетворювача, то $m = k-1$ визначає порядок диференційного оператора (1) – його характеристичного поліному (модель структури об'єкту) та відповідних регресійних рівнянь

$$\hat{\mathbf{y}}_t = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m. \qquad (6)$$

Коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_m$ характеристичного полінома визначаються з вирішення системи нормальних рівнянь, наприклад, для $m = 3$:

$$\begin{aligned}
a_0 n + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 + a_3 \sum t^3 &= \sum y_t \\
a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 + a_3 \sum t^4 &= \sum y_t t \\
a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 + a_3 \sum t^5 &= \sum y_t t^2 \\
a_0 \sum t^3 + a_1 \sum t^4 + a_2 \sum t^5 + a_3 \sum t^6 &= \sum y_t t^3
\end{aligned} \qquad (7)$$

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad a_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

де Δ – визначник системи (7);

$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – відповідні визначники, в яких перший, другий, третій, четвертий стовпці у визначнику Δ замінені стовпцем

$$\begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum y_t t \\ \sum y_t t^2 \\ \sum y_t t^3 \end{pmatrix}^T$$

і характеристичне рівняння диференційного оператора (1) має вигляд

$$a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \quad (8)$$

Використовуючи метод Лобачевського-Греффе [11] (або методи Данилевського О.М., Крилова О.М., Леверьє-Фаддеєва, метод обертань [12]) можна оцінити корені r_1, r_2, r_3 характеристичного рівняння диференційного оператора (1) з точністю знайдених коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, a_3 згідно системи нормальних рівнянь (7).

У випадку, коли корені характеристичного полінома мають кратність, розглянута процедура може бути вдосконалена з урахуванням того, що при непарному числі коренів завжди є хоча б один дійсний корінь, а комплексні корені завжди зустрічаються як комплексносполучені числа та при негативності дійсних частин комплексносполучених коренів знайдене рішення буде стійким, крім того, при умові, що модулі всіх коренів $|r_i| < 1,\ i = \overline{1, m}$ забезпечується асимптотична стійкість лінійного оператора (1) [2, 11, 13].

Висновки по першому підходу:

1. Оцінка структури моделі динамічного оператора зведена до оцінки структури його характеристичного полінома.

2. Використання ізоморфності моделей операторів на основі лінійних диференційних рівнянь з постіними коефіцієнтами та регресійних різницевих рівнянь, знайдених методом найменших квадратів, отримані системи нормальних рівнянь для визначення коефіцієнтів характеристичного полінома.

3. При виконанні вимог умов Гауса-Маркова та перевірки часових рядів на наявність (та усунення) грубих помилок в часових згладжених рядах різниць можна отримати задовільні оцінки коефіцієнтів моделі структури динамічного об'єкту, що не регулюється, за його вихідними сигналами.

4. Розрахунок коренів характеристичного поліному на основі метода Лобачевського-Греффе дозволяє оцінити стійкість моделі структури динамічного об'єкту [11].

Найбільш часто зустрічаються задачі ідентифікації оператора моделі динамічного об'єкта, вихідний сигнал якого багатомірний і в результаті його квантування за часом та за рівнем будуть отримані багатомірні (векторні) часові ряди, на підставі яких будемо оцінювати оператор динамічної системи. Попередньо слідуючи [8, 12] введемо множину позначень та понять теорії лінійних просторів і лінійних відображень [2, 7, 8, 9, 12]:

id – тотожний оператор;

inj – канонічна ін'єкція (вкладення, відповідність між множинами, при яких різним елементам з множини X відповідають різні елементи в множині Y);

dim – розмірність лінійного простору;

im – образ лінійного простору (область значень);

ker – ядро (нуль простору) лінійного відображення;

iso – ізоморфізм (лінійна бієкція);

σ – оператор зсуву;

S(mod ~) – множина класів еквівалентності;

$\mathcal{L}$(mod $\mathcal{L}'$) – векторний простір, індуковане відношення еквівалентності;

$\mathcal{L}' \oplus$span{e1, e2, … en} $= \mathcal{L}$ – тоді набор {e1, e2, … en} є додатковим базисом для підпростору $\mathcal{L}'$ в $\mathcal{L}$.

Сюр'єкція – відображення між множинами X та Y [X⟶Y], при якому кожний елемент множини Y відповідає деякому елементу множини X.

Динамічна система задається згідно Калмана Р.Е. та Віллемса Я.К. [7, 8, 12] у виді трійки

$$\Sigma := \{T, W, \mathcal{B}\}, \quad (9)$$

де T – деякий (нескінчений) інтервал в R (R – дійсна пряма: R+ – множина ненегативних дійсних чисел, Z – множина цілих чисел, Z+ – множина ненегативних цілих чисел);

T $\subset$ R;

W – алфавіт сигналів;

$\mathcal{B} \subset W^T$ – поведінка системи;

T в W^T – W транспоноване.

Якщо S – деяка множина, q – позитивне число, то $S^q = \underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{q\ раз}$ – декартовий добуток.

$R_+^n = \underbrace{R_+ \times R_+ \times \ldots \times R_+}_{n\ раз}$ – декартовий добуток множин ненегативних цілих чисел.

R^n – множина n-мірних векторів – те, що отримуємо після квантування за часом багатомірного вихідного сигналу динамічної системи.

W – простір, в якому знаходяться значення змінних, що цікавлять, і через який система взаємодіє зі своїм зовнішнім середовищем. Елементи з W описують характерні властивості (атрибути) динамічної системи.

$\mathcal{B}$ – поведінка системи, складається з тих траєкторій W: T ⟶ W (⟶ – знак відображення), які сумісні із законами, що управляють динамічною системою.

Наведене визначення узагальнює звичне поняття системи типу вхід-вихід, а $\mathcal{B}$ – множина всіх траєкторій системи типу вхід-вихід.

Розглядається клас динамічних моделей M, що складається з зовнішніх поведінок скінченомірних лінійних стаціонарних систем з простіром зовнішніх сигналів R^q; кожний елемент з M визначається двома цілими числами m та n і чотирма матрицями:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}' = R^{n\times n} \text{ – матриця коефіцієнтів;}\\ &\mathbf{B}' = R^{n\times m} \text{ – матриця виходу;}\\ &\mathbf{G}' = R^{q\times n} \text{ – матриця обходу системи;}\\ &\mathbf{D}' = R^{q\times m} \text{ – матриця управління,} \end{aligned} \tag{10}$$

що задають зовнішню поведінку системи [4, 7, 12, 14], яке має вид

$$\sigma\vec{x} = \mathbf{A}'\vec{x} + \mathbf{D}'\vec{u}, \quad \vec{w} = \mathbf{B}'\vec{x} + \mathbf{G}'\vec{u}, \tag{11}$$

де $\vec{x}$ – вектор стану системи;

$\vec{u}$ – вектор входу – вектор управління;

σ – оператор зсуву;

(при умові, що динамічна система може бути описана лінійними диференційними (або різницевими) рівняннями).

Поведінка системи має чітке теоретико-множинне визначення:

$$\mathcal{B}_s(\mathbf{A}',\mathbf{B}',\mathbf{G}',\mathbf{D}') := \{\vec{w} : T \to R^q \mid \exists\vec{x} : T \to R^n \text{ та } \vec{u} \to R^m, \text{таке, що справедливі рівняння } (s)\}, \tag{12}$$

де ∃ – квантор існування;

рівняння (s) визначають множину поліномів p, $p \in R[s]$;

s – невідома змінна.

Аналогічно $R^n[s]$ – множина векторних поліномів з коефіцієнтами в R^n, а $R^{n_1\times n_2}[s]$ – множина (матричних) поліномів з коефіцієнтами в $R^{n_1\times n_2}$. Якщо поліном

$$p_n s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \ldots + p_0 =: p \in R[s] \tag{13}$$

маємо коефіцієнт $p_n \neq 0$, то число n називається його ступенем $\partial(p) := n$.

Множина поліномів від позитивних і негативних ступенів s з коефіцієнтами з R, позначимо через $R[s, s^{-1}]$. Його векторні та матричні аналоги записуються у виді $R^n[s, s^{-1}]$ і $R^{n_1\times n_2}[s, s^{-1}]$ відповідно.

Задача для (10), (11) зводиться до знаходження найбільш сильної моделі з класу M не спростовану виміром $Z = \{\vec{w}\}$ та серед таких моделей вказати одну, для якої розмірність простору станів n і розмірність m простору управляючих входів $\vec{u}$ будуть найменшими можливими.

Оптимальне рішення можливо отримати у математично точній постановці на теоретико-множинному рівні з використанням ганкелевих матриць [12].

Використовуючи підхід [4, 7, 12] на основі лінійних просторів і лінійних перетворень та відображень рішення будується з наступних етапів.

В результаті квантування за часом та за рівнем множини зафіксованих траєкторій динамічної системи отримаємо часові векторні ряди:

$$\begin{aligned} &\vec{w}(0), \vec{w}(1), \ldots, \vec{w}(t), \ldots \quad \text{у випадку } T = Z_+\\ &\ldots, \vec{w}(-1), \vec{w}(0), \vec{w}(1), \ldots \quad \text{у випадку } T = Z \end{aligned} \tag{14}$$

На підставі (14) будуємо нескінчені (векторні) ганкелеві матриці

$$\mathcal{H}(\vec{w}) := \begin{pmatrix} \vec{w}(0) & \vec{w}(1) & . & . & . & \vec{w}(t') & . & . & . \\ \vec{w}(1) & \vec{w}(2) & . & . & . & \vec{w}(t'+1) & . & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{w}(t) & \vec{w}(t+1) & . & . & . & \vec{w}(t+t') & . & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (15)$$

(випадок $T = Z_+$)

$$\mathcal{H}(\vec{w}) := \begin{pmatrix} . & . & . & \vec{w}(-1) & \vec{w}(0) & \vec{w}(1) & . & . & . & \vec{w}(t') & . & . & . \\ . & . & . & \vec{w}(0) & \vec{w}(1) & \vec{w}(2) & . & . & . & \vec{w}(t'+1) & . & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & . & \vec{w}(t-1) & \vec{w}(t) & \vec{w}(t+1) & . & . & . & \vec{w}(t+t') & . & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (16)$$

(випадок $T = Z$)

та їх обмеженні (або усічені) підматриці $\mathcal{H}_t(\vec{w}),\ t \in Z_+$, що складаються з перших (t + 1) q рядків (або перших (t + 1) блочних рядків матриці $\mathcal{H}$.

При рішенні задачі спочатку визначаємо запізнення. З ганкелевої структури (16) випливає, що для $t \in Z_+$, вирази

$$\begin{aligned} \rho_t &:= \operatorname{rank} \mathcal{H}_t(\vec{w}) - \operatorname{rank} \mathcal{H}_{t-1}(\vec{w}) \\ \rho_0 &:= \operatorname{rank} \mathcal{H}_0(\vec{w}) \end{aligned} \quad (17)$$

визначають незростаючу послідовність ненегативних цілих чисел [7, 12]. Далі обчислюємо таке t', що

$$\rho_t = \rho_{t'}, \text{ для } t \geq t'. \quad (18)$$

Наступним кроком є визначення лінійної залежності. Обчислюємо такі векторні рядки $r_1, r_2, \ldots, r_q \in R^{1\times(t'+1)q}$, що їх лінійна оболонка дорівнює ортогональному доповненню стовпців матриці $\mathcal{H}_{t'}(\vec{w})$ [9]. Один зі способів зводиться до визначення підматриці M в $\mathcal{H}_{t'}(\vec{w})$, що має максимальний ранг. Нехай M утворена рядками l1, l2, …, lr та стовпцями k1, k2, …, kr матриці $\mathcal{H}_{t'}(\vec{w})$. Потім запишемо інші рядки, що утворені стовпцями з номерами k1, k2, …, kr з $\mathcal{H}_{t'}(\vec{w})$, як лінійну комбінацію рядків матриці M. коефіцієнти цих лінійних комбінацій визначають вказане ортогональне доповнення. Враховуючи ганкелевість матриці $\mathcal{H}_t(\vec{w})$, коефіцієнти, що входять в співвідношення лінійної залежності, вочевидь визначають вектори r1, r2, …, rq (тут всюди q – розмірність часових рядів, використаних для побудови ганкелевої матриці).

Наступним кроком в розробці алгоритму ідентифікації являється побудова матриці найбільш сильної незаперечної поведінки $\mathcal{B}^*_{\vec{w}}$ при точному моделюванні. Для цього для $i \in q$ запишемо ri у виді $r_i := (r_{i,0}, r_{i,1}, \ldots, r_{i,t'})$ з $r_{i,j} \in R^{1\times q}$ і визначимо у виді

$$\vec{r}_i(s) := \sum_{k=0}^{t'} r_{i,k} s^k \text{, та } R^*_{\vec{w}} := \operatorname{col}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_q). \quad (19)$$

Символ col для $\vec{r}_i, i \in q$ означає вираз

$$R^*_{\vec{w}} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vdots \\ \vec{r}_q \end{pmatrix}. \quad (20)$$

З цього витікає, що при $\vec{w}: T \to R^q$ – є спостережуваний часовий ряд (14) з $T = Z_+$ або Z і матриця $R^*_{\vec{w}}$ визначена за формулою (20), то співвідношення

$$R^*_{\vec{w}}(\sigma)\vec{w} = 0 \quad (21)$$

представляє найбільш сильну незаперечну (AR)-модель (авторегресійну модель) ряду $\vec{w}$, яка отримана квантуванням множини спостережуваних траєкторій динамічної системи.

Пояснимо, що є (AR)-моделлю. Нехай $R_0, R_1, \ldots, R_l \in R^{\varphi\times q}$ і має множину рівнянь від часових рядів $\vec{w}_1(\bullet), \vec{w}_2(\bullet), \ldots, \vec{w}_q(\bullet)$:

$$R_l\,\vec{w}(t+l)+R_{l-1}\,\vec{w}(t+l-1)+\ldots+R_0\,\vec{w}(t)=0. \quad \text{(AR)}$$

Рівняння (AR) виконується $\forall t\in T$ у відповідності з визначенням динамічної системи і більш коротко може бути записано

$$R(\sigma)\vec{w}=0\,. \qquad \text{(AR)}$$

Узагальнення на випадок кінцевої множини спостережуваних часових рядів: розглянемо ситуацію, коли спостерігаються k часових рядів $\vec{w}_1,\vec{w}_2,\ldots,\vec{w}_k$ і на основі множини вимірювань $Z=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\ldots,\vec{w}_k\}$ шукається найбільш сильна неспростована (AR)-модель. Алгоритм розповсюджується на випадок, в якому сімейство вимірювань $\mathcal{L}$ складається з всіх кінцевих множин. Для розробки моделі в цій (найбільш реальній) ситуації алгоритм слід будувати на основі блочної ганкелевої матриці

$$\mathcal{H}(\vec{W}):=\begin{pmatrix}\vec{W}(0) & \vec{W}(1) & . & . & . & \vec{W}(t') & . & . & .\\ \vec{W}(1) & \vec{W}(2) & . & . & . & \vec{W}(t'+1) & . & . & .\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vec{W}(t) & \vec{W}(t+1) & . & . & . & \vec{W}(t+t') & . & . & .\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix} \tag{22}$$

(випадок $T=Z_+$),

в якій $\vec{W}:T\to R^{q\times k}$ визначається формулою $\vec{W}(t):=(\vec{w}_1(t),\vec{w}_2(t),\ldots,\vec{w}_k(t))$ з очевидною модифікацією відповідних об'єктів, коли $T=Z$.

Перейдемо від загальних теоретичних узагальнень до найбільш природної задачі, яку сформулюємо наступним чином: для заданого отриманого в результаті обробки експерименту q-мірного часового ряду (14) для конкретного t визначаємо запізнювання згідно формул (18), (19), для побудованої матриці (15) визначаємо лінійну залежність, з умови (21) знаходимо найбільш сильну неспростовану (AR)-модель ряду (14) для $T=Z_+$ за формулою $R^*_{\vec{w}}(\sigma)\mathbf{w}=0$.

Тепер розглянемо знов часовий ряд $\vec{w}$: $Z\to R^q$ і введемо наступну розбиту на блоки (нескінчену в чотирьох напрямках) ганкелеву матрицю

$$\left(\frac{\mathcal{H}_-(\vec{w})}{\mathcal{H}_+(\vec{w})}\right):=\left(\begin{array}{ccccccc} & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \ldots & \vec{w}(-t-1) & \vec{w}(-t) & \ldots & \vec{w}(0) & \ldots\\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \ldots & \vec{w}(t-2) & \vec{w}(-1) & \ldots & \vec{w}(t'-1) & \ldots\\ \ldots & \vec{w}(-1) & \vec{w}(1) & \ldots & \vec{w}(t') & \ldots\\ \hdashline \ldots & \vec{w}(0) & \vec{w}(1) & \ldots & \vec{w}(t'+1) & \ldots\\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \ldots & \vec{w}(t-1) & \vec{w}(t) & \ldots & \vec{w}(t+t') & \ldots\\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}\right) \tag{23}$$

$\operatorname{rank}(\mathcal{H}_-(\vec{w});\mathcal{H}_+(\vec{w}))<\infty$. Насправді це число дорівнює розмірності мінімального представлення з простором станів $\sum_s(\mathbf{A}',\mathbf{B}',\mathbf{G}',\mathbf{D}')$ найбільш сильної неспростованої (AR)-моделі $\mathcal{B}(R^*_{\vec{w}})$ часового ряду $\vec{w}$ [12].

Розглянемо більш загальний алгоритм знаходження моделі в просторі станів дещо розширивши початкові дані часового ряду:

$$\ldots,\vec{w}(-1),\vec{w}(0),\vec{w}(1),\ldots,\vec{w}(t),\ldots \tag{24}$$

і визначимо структуру матриці $\mathcal{H}(\vec{w})$ [12]. Для цього вводяться матриці H– та H+ (де H– складена з рядків матриці $\mathcal{H}_-(\vec{w})$, а H+ – з рядків матриці $\mathcal{H}_+(\vec{w})$), що $\operatorname{rank}(H_-;H_+) = \operatorname{rank}(\mathcal{H}_-(\vec{w});\mathcal{H}_+(\vec{w})) =: n$.

Насправді, згідно формул (18) та (19), обираючи t' отримаємо матриці, що підходять, зупинившись на $q(t'+1)$ нижніх рядків в $\mathcal{H}_-(\vec{w})$ та $q(t'+1)$ верхніх рядків в $\mathcal{H}_+(\vec{w})$. Далі визначаємо матрицю $\operatorname{col}(H_1,H_2)$, що складається з такого кінцевого набору стовпців з $H = \operatorname{col}(H_1,H_2)$, що стовпці $\operatorname{col}(H_1,H_2)$ породжують лінійний простір, натягнутий на стовпці матриці H [9]. Очевидно, $\operatorname{rank}(H_1;H_2) = n$.

На наступному кроці визначаємо простори станів. Обчислюємо ядро матриці H1 та положимо $\mathcal{H} = H_2 \ker H_1$. Відзначимо, що $\dim(\operatorname{im} H_2)(\operatorname{mod}\mathcal{H}) = n$.

Потім положимо $X \cong ((\operatorname{im} H_2)(\operatorname{mod}\mathcal{H}))$.

Припустимо $\vec{x}(t) := \vec{h}_+(t)(\operatorname{mod}\mathcal{H})$, де $\vec{h}_+(t)$ – стовпець з номером t матриці H+.

На наступному етапі визначаємо простір вхідних сигналів. Положимо $\vec{f}(t) := \operatorname{col}(\vec{w}(t),\vec{x}(t))$ та $S := \operatorname{span}\{\vec{f}(t), t \in Z\}$. Очевидно, що проекція πх: $S \to X$, що визначається рівністю $\pi_x \vec{f}(t) := \vec{x}(t)$, сюр'єктивна (тим самим S представлено як векторне розшарування над X).

Задамо векторний простір U і сюр'єктивне відображення $\pi_u := S \to U$ так, що $S = X \oplus U$, тобто так, що відображення $\pi := (\pi_x, \pi_u)$ бієктивно. Очевидно, що $\dim U = \dim S - \dim X$. Припустимо [12]

$$\vec{u}(t) := P_u \vec{f}(t) \qquad (25)$$

Останнім кроком алгоритму згідно [12] є визначення параметрів системи. Для $i \in (n+m)$ введемо числа ti такі, що вектори $\vec{f}(t_i)$ утворюють базис простору S. Тоді $\vec{f}(t_i) = \operatorname{col}(\vec{x}(t_i),\vec{u}(t_i))$ будуть базисом і для $X \oplus U$.

Тепер визначимо таку $(n+q)\times(n+m)$-матрицю M, що

$$\mathbf{M} : \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i) \\ \hline \vec{u}(t_i) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i+1) \\ \hline \vec{w}(t_i) \end{pmatrix} \qquad (26)$$

для якої доказано в [12] наступне твердження.

Нехай $\vec{w}: Z \to R^q$ – спостережуваний часовий ряд і $\mathbf{M} \in R^{(n+q)\times(n+m)}$ – побудована, і розбивши її на блоки

$$\mathbf{M} := \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \hline \mathbf{G}' & \mathbf{D}' \end{array}\right), \qquad (27)$$

так, що $\mathbf{A}' = R^{n\times n}$, $\mathbf{B}' = R^{n\times m}$, $\mathbf{G}' = R^{q\times n}$ та $\mathbf{D}' = R^{q\times m}$ отримаємо, що система $\sum_s(\mathbf{A}',\mathbf{B}',\mathbf{G}',\mathbf{D}')$ є неспростованою моделлю з мінімальним простором стану і мінімальним числом управляючих входів для часового ряду $\vec{w}$, отриманого експериментальним шляхом в результаті квантування множини траєкторій динамічної системи.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

1. Для рішення задачі точного моделювання структури моделі динамічної системі на основі дослідних даних у виді багатомірних часових рядів необхідно знати тонку будову системи. Це можна визначити декількома еквівалентними способами: як розмірність деяких підпросторів, безпосередньо зв'язаних з поведінкою системи, як структуру запізнювання у (AR)-представленні з найкоротшим запізнюванням або, нарешті, як індекси спостережності мінімального представлення типу вхід – стан – вихід.

2. Застосування ганкелевих матриць, побудованих на експериментально отриманих часових векторних рядах дозволяє отримати неспростовану модель системи з мінімальним простором станів та мінімальним числом управляючих входів, що повністю використовує інформацію, яка міститься в множині часових рядів, що являються рішенням оператора динамічної системи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Marasanov V.V. Prognozirovaniye struktury dinamicheskikh sistem / V.V. Marasanov, O.I. Zabytovskaya, A.O. Dymova – Vestnik KHNTU № 1 (44) – 2012, S. 292-302.
2. Neymark M.A. Lineynyye differentsial'nyye operatory / M.A. Neymark – M.: Nauka, 1969. – 526 s.
3. Grop D. Metody identifikatsii sistem / Daniel' Grop. – M.: Mir, 1979. – 302 s.
4. Porter U. Sovremennyye osnovaniya obshchey teorii sistem / U. Porter – M.: Nauka, 1971. – 556 s.
5. Gudzenko L.I. Nekotoryye voprosy struktury ob"yekta po ustanovivshemusya signalu / L.I. Gudzenko – Trudy fizicheskogo instituta imeni P.N. Lebedeva, T.45 – 1969, S. 110-133.
6. Boks Dzh. Analiz vremennykh ryadov. Prognoz i upravleniye / Dzh. Boks, G. Dzheniks – M.: Mir, 1974. – 406 s.
7. Fadeyev D. K. Vychislitel'nyye metody lineynoy algebry / D. K. Fadeyev, V. N. Fadeyeva. – M.: Fizmatgiz, 1963. – 736 s.
8. Kalman R. Ocherki po matematicheskoy teorii sistem / R. Kalman, P. Falb, M. Arbib – M.: Yeditorial URSS, 2004. – 400 s.
9. Gantmakher F.R. Teoriya matrits / Feliks Ruvimovich Gantmakher. – M.: FIZMATLIT, 2004. – 560 s.
10. Ekonomiko-matematicheskiye metody i prikladnyye modeli / Pod red. V.V. Fedoseyeva – M.: YUNITI, 1999. – 391 s.
11. Demidovich B.P. Osnovy vychislitel'noy matematiki / B.P. Demidovich, I.A.Maron – M.: Nauka, 1963. – 659 s.
12. Villems Yan K. Teoriya sistem. Matematicheskiye metody i modelirovaniye. Sbornik statey / Yan K. Villems – M.: Mir, 1989. – 384 s.
13. Rozenvasser Ye.N. Chuvstvitel'nost' sistem upravleniya / Rozenvasser Ye.N., Yusupov R.M. – M.: Nauka, 1981. – 464 s.
14. Tu YU. Sovremennaya teoriya upravleniya / Yulius Tu – M.: Mashinostroyeniye, 1997. – 472 s.
15. Marasanov V.V. Issledovaniye na chuvstvitel'nost' modeley dinamicheskikh sistem, poluchennykh proyektsionnym metodom / V.V. Marasanov, A.O. Dymova, V.S. Dymov // Problemi ínformatsíynikh tekhnologíy.- 2016.-№1(019).- S. 169-173 (Data publíkatsíї – traven' 2016r.)

Рецензент: д.т.н., проф. Рудакова Г.В.,
Херсонський національний технічний університет