

АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ ПРОЦЕСУ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ ЗА ЇХ ЛІНІЯМИ ОБРИСУ

УДК 681.3: 514.18

СУЛІМЕНКО Степан Юрійович

аспірант кафедри інформаційних технологій в архітектурі,
Київський національний університет будівництва та архітектури.

ВВЕДЕННЯ

Індустрія дизайну вимагає постійної роботи над формою, її швидкого оновлення, переосмислення нових результатів взаємодії складних об'єктів в просторі. Досягнення органічного взаємозв'язку між призначенням та формою об'єкта проектування виникає в наслідок адекватного вписування його обрису у навколишнє середовище таким чином, щоб ті елементи оточення, що є невиразними, або не несуть естетичного навантаження були здебільшого сховані за ним. Таким чином правильно побудований обрис об'єкту може мати як маскувальну функцію, так і надати місцевої виразності у штучному середовищі.

Рішенням задач геометричного моделювання та взаємодією цих рішень з апаратом комп'ютерної графіки займаються багато авторів [1-3]. В свою ж чергу розроблено розвиненого апарату для моделювання на основі перспективного зображення ліній обрису досі не існує.

В роботі ставиться задача геометричного аналізу взаємодії форми поверхні з його зображеннями з метою створення дієздатних алгоритмів та програм для формування поверхонь за їх лініями обрисів та використання їх в практиці архітектурного та технічного дизайну.

Питання пов'язані з моделюванням поверхонь обертання на перспективних зображеннях розглядалися автором і раніше [4,5]. Фрагмент роботи [4] приводиться і в цій статті як матеріал для поглибленого дослідження.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Властивості як самих поверхонь обертання так і їх обгортаючих конусів загальновідомі. Проте для їх

успішного використання в аналізі і синтезі алгоритмів необхідно виділити з цих властивостей корисні та наповнити їх конкретним конструктивним змістом.

Кожна площина, що проходить через вісь поверхні обертання є її площиною симетрії. Тому площина Δ , що інцидентна осі деякої поверхні обертання і довільній точці S , буде площиною симетрії конуса, що обгортає цю поверхню обертання і має вершину в точці S .

Спільну лінію поверхні обертання та обгортаючого (дотичного) конуса називають їх лінією контакту. Лінія контакту поділяється площиною Δ на дві конгруентні гілки, що симетричні відносно цієї площини.

Якщо ми розглянемо обгортаючий конус як окремий об'єкт, початкову лінію контакту можна замінити на лінію, що отримується в будь-якому перерізі. При цьому ми маємо необхідну нам інтерпретацію: площина перерізу – картинна площина K , точка S – точка зору, лінія перетину – перспективна лінія обрису.

Такий конус втрачає інформацію про лінію контакту, проте зберігає інформацію про дотичні площини. Якщо разом з лінією обрису зберігається інформація про площину симетрії Δ у вигляді прямої q' , яка є перетином площини Δ з картиною K , то такий конус будемо називати коректно заданим, або спрощено коректним.

Основне призначення коректних конусів – моделювання поверхонь для яких площина Δ є площиною симетрії, та поверхонь обертання за заданою лінією обрису, тобто за заданим коректним конусом.

Звичайно за коректним конусом можуть бути побудовані і несиметричні поверхні. Будь-яка лінія контакту, що задана на поверхні конусу, може задавати одну, або

множину поверхонь (в залежності від апарату моделювання), які задовольняють умову дотику. Але такі поверхні не будуть мати Δ своєю площиною симетрії. Необхідною та достатньою умовою можливості побудови симетричної (що до Δ) поверхні є симетрія лінії контакту.

Симетрична лінія контакту може бути побудована за одних з наступних прийомів:

Як перетин коректного конуса з поверхнею, що має ту ж площину симетрії. В найпростішому варіанті циліндричною поверхнею, з направляючою перпендикулярною площиною Δ .

Половина лінії контакту задається або довільно на поверхні конуса, або в перетині цього конуса іншою довільною поверхнею. Друга, симетрична їй половина, задається за умовою симетрії щодо площини Δ .

Відрізняється тим, що попередньо встановлюється відповідність між твірними коректного конуса, а саме встановлюються пари симетричних твірних і на них відкладають рівні відрізки довжини яких задаються як функціональні.

Останній прийом у випадку, коли площина Δ розташована під довільним кутом до площини картини, вимагає додаткових побудов, бо лінія обрису навіть коректного конуса в цьому разі не є симетричною [5].

Симетричні твірні коректного конуса при несиметричній лінії обрису на картині визначається парами точок лінії обрису, що належать прямим пучка з центром в точці сходу F_p перпендикулярів до площини Δ .

Ця властивість безпосередньо впливає з того, що кожна пара точок, яка симетрична відносно площини, лежить на перпендикулярі до неї. Тобто, положення точки F_p не залежить від форми конуса, а тільки від положення його площини симетрії. Якщо площина симетрії перпендикулярна площині картини – точка сходу F_p невласна.

Випадок, коли площина Δ перпендикулярна картині, вважаємо тривіальним.

Точка зору та лінія обрису на деякій картині породжує обгортаючий конус. Після цього, з геометричної точки зору, положення картини не має значення і може бути змінено так, щоб настав тривіальний випадок. Для цього нова картина W має бути перпендикулярна до площини Δ .

Площина $W \perp \Delta$ має два вільних параметра, але їх значення не суттєві і можуть бути обрані довільно. Картина W має такі застосування.

Змінюючи положення картини користувач може бачити як виглядатимуть лінії обрису, якщо спостерігач буде дивитися безпосередньо на об'єкт. За її допомогою може бути приведена до симетричного випадку лінія обрису, що задана на картині по один бік від осі q' .

Вище розглядалась ситуація коли коректний конус задавався як проекція поверхні обертання. Але на практиці при розв'язанні поставленої задачі первинною є лінія обрису. У нетривіальному випадку її неможливо задати так, щоб конус був симетричним.

Тому найбільш раціонально задавати половину лінії обрису та визначати положення осі q' , а тим самим і площину симетрії Δ . Далі будують площину $W \perp \Delta$. В ній визначають криву p'' , як перетин обгортаючого конуса з площиною W , та вісь q'' ($\Delta \wedge W$). Будують другу гілку лінії обрису симетричну p'' відносно осі q'' . Зворотним проєціюванням отримана крива повертається на площину K .

І головне: всі теоретичні висновки і алгоритми розв'язання задач, що доведені, або розроблені для тривіального випадку автоматично виконуються в загальному випадку і навпаки.

Поверхні обертання задаються віссю і твірною, що обертається навколо неї. Ця твірна, в загальному випадку, може бути просторовою, тобто лінія контакту може розглядатися як твірна. Кожна точка лінії контакту належить:

- спільній дотичній площині конуса і поверхні обертання в цій точці;
- площині, що проходить через вісь і перпендикулярна спільній дотичній площині;
- твірній конуса, що належить обраній дотичній площині.

Ці властивості точок лінії контакту є основою для побудови поверхні обертання за дотичним конусом.

Твердження 1. Якщо задана вісь поверхні обертання, що не проходить через точку зору, то кожна точка лінії обрису з визначеною дотичною задає одне коло в площині, що перпендикулярна осі

Доведення твердження випливає з алгоритму побудови, конструктивна схема якого задана на рис.1.

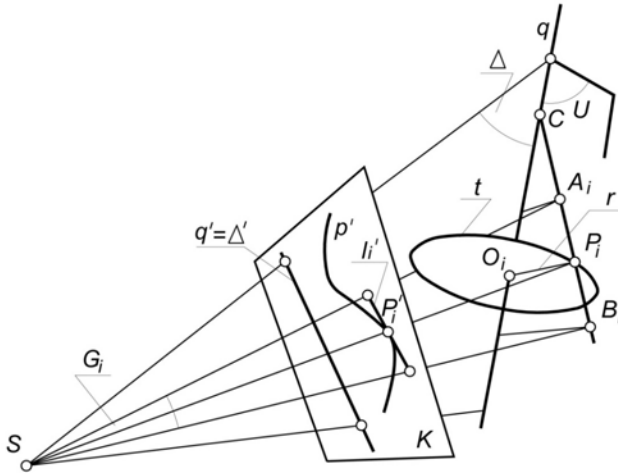


Рис.1. Загальна схема утворення поверхнь обертання за лініями обрисів

Задано вісь обертання q і на лінії обрису $p \subset K$ визначимо дискретну множину точок P_i разом з дотичними l_i в них. В кожній точці P_i визначена площина G_i що задана прямими l_i та SP_i . Ця площина дотична і до обгортаючого конусу, і до поверхні обертання, що моделюється. Осі q належать центри двопараметричної множини кіл в площинах, що перпендикулярні до неї. Однопараметрична множина з них дотикається до площини G_i . Точки дотику належать прямій, що є перетином площини G_i та перпендикулярної до неї площини U , що проведена через вісь q . На рис.2 це пряма $A_i B_i$. Шукана точка має належати прямій SP_i та прямій $A_i B_i$. На тому ж рисунку це точка їх перетину P_i . В площині, проведеної через точку P_i перпендикулярно осі q знаходиться центр кола $O_i \in q$ та його радіус r . Таким чином, кожна пара $\{P_i, l_i\}$ визначає одне коло поверхні обертання навіть тоді, коли для двох кіл збігаються або точки $P_i = P_j$, а $(l_i \neq l_j)$, або $l_i = l_j$, а $(P_i \neq P_j)$. Тобто лінія p може мати самоперетин, але в точці самоперетину дотичні мають відрізнитися і навпаки. Лінія обрису p' на картині має однопараметричну множину пар $\{P_i, l_i\}$, тому вона однозначно задає поверхню обертання, коли при $i \neq j$ не знайдеться точки, для якої $P_i = P_j$ та $l_i = l_j$.

Таким чином справедливе і більш загальне твердження.

Твердження 2. При заданих точці зору, лінії обрису на картині, та просторового положення осі, поверхня обертання визначається однозначно.

Приклад 1.

На рис. 2 наведено приклад роботи алгоритму за схемою наведеною на рис.1. На екрані монітору користувач задає лінію l' . Разом з обраною точкою зору вона задає площину Δ – площину симетрії конусу, який має обгорнути поверхню, що моделюється. Далі користувач задає по один бік від прямої l' криву p' так, як він бачить обрис майбутньої поверхні. На рисунку, зокрема, показано цей фрагмент у зменшеному вигляді.

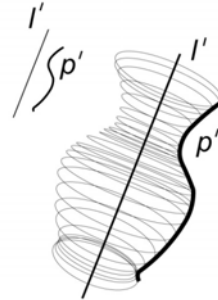


Рис. 2. Приклад моделювання поверхні за заданою лінією обрисів і віссю обертання

Крива p' описана сплайном після чого в автоматичному режимі поділена на 25 точок. Положення дотичних задавалися найпростішим варіантом, як лінія, що проходить через точку P'_i паралельно вектору $P_i - P_{i-1}$. За цієї інформацією в просторі може бути побудована двопараметрична множина поверхонь. Якщо ми будемо змінювати положення осі $q \triangleq \Delta$ лінія бічного контуру не зміниться, але зміниться положення граничних кіл.

В твердженні 1 передбачалося, що задана вісь поверхні обертання (на що витрачається 4 параметри). В прикладі 1 задавалася площина симетрії (2 параметри), а в ній вісь (ще 2 параметри). Це найбільш поширені в практиці варіанти.

Постає питання, чи можливо задати вісь на основі лише інформації про лінію p' . відповідь на це питання дає властивість поверхні обертання: через кожну точку поверхні проходить дотична сфера, центр якої належить осі обертання.

Твердження 3. Площина симетрії обгортаючого конусу та дві довільні точки цього конусу, при умові, що вони належать до деякої поверхні обертання, визначають вісь цієї поверхні.

Кожна точка, що належить поверхні обертання та дотичному до неї конусу належить до їх лінії контакту. В ній конус та поверхня обертання мають спільну дотичну площину G_i . Перпендикуляр n проведений до площини G_i в точці P_i – геометричне місце центрів дотичних сфер. Перетин цього перпендикуляру з площиною Δ в деякій точці Q_i визначає точку, через яку має пройти вісь поверхні при умові, що P_i належить поверхні обертання. Положення осі залежить від двох параметрів тому точок Q_i ($i=1,2$) має бути дві.

Це твердження має таке застосування. Змінюючи в кінцевих точках P'_0 на P'_n положення дотичних l'_0 та l'_n і положення самих точок P_0 та P_n на твірних конуса, можемо досягти бажаного положення граничних кіл та величин їх радіусів.

Якщо площина симетрії не задана то, з параметричних міркувань, на обгортаючому конусі необхідно задати чотири точки P_i , що будуть водночас належати поверхні обертання.

Твердження 4. Чотири точки P_i , що належать водночас деякій поверхні обертання і її дотичному конусу

визначають вісь поверхні обертання, якщо знайдеться пряма яка перетинає всі чотири перпендикуляри p_i , що проведені до дотичних площин G_i в цих точках.

В загальному випадку перпендикуляри p_i мимобіжні. Три з них задають однопорожнинний гіперболоїд як направляючі прямі. Точка перетину четвертого перпендикуляра з цим гіперболоїдом визначає твірну (пряму другого сімейства), що проходить через цю точку і перетинає всі направляючі (прямі першого сімейства).

Зазвичай маємо два розв'язки. Задача буде невизначеною коли три з перпендикулярів p_i перетинаються в одній точці і не буде мати розв'язку, коли четвертий перпендикуляр не перетинає гіперболоїд.

Далі з'ясуємо чи завжди схема твердження 1 (рис.1) дасть рішення. Рішення буде не визначеним, якщо для точки P'_i площина G_i перетинає площину U по твірній конуса SP'_i . Візуально це можливо дослідити тільки в тривіальному випадку.

В тривіальному випадку схема моделювання набуває більш конструктивного характеру. Нехай задані вісь q поверхні обертання і довільна площина H_0 , що перпендикулярна до q . Площина симетрії дотичного конусу визначається точкою зору S та віссю q . Картина $W=K$ проводиться так, що $W \perp \Delta$. Тоді лінії перетину площин G_i з площинами, що паралельні площині H_0 зададуть напрям дотичних до кругових твірних поверхні обертання і всі кругові твірні можуть бути визначені в проєкції на площину H_0 і підняті на відповідні твірні конусу.

На рис.3 картина не тільки перпендикулярна площині $\Delta(S, l)$, а і паралельна осі q . Тоді картина відіграє роль фронтальної площини проєкцій, а перпендикулярна до l площина H_0 – горизонтальної. Лінія основи (B.L. – Base Line) їх спільна вісь.

Лінія обрису на картині задана умовно хвилястою кривою так, що три точки P, A та B мають спільну дотичну. Ця дотична пряма разом з точкою S визначає дотичну площину (на рис.1 це площина G_i). Перетинаємо її площиною, що перпендикулярна до l і належить точці S . На картині ця площина співпадає з лінією горизонту (H.L. – Horizontal Line). Тоді дотична площина буде визначена точкою S та горизонталлю $MS = h_0(M, S, P)$.

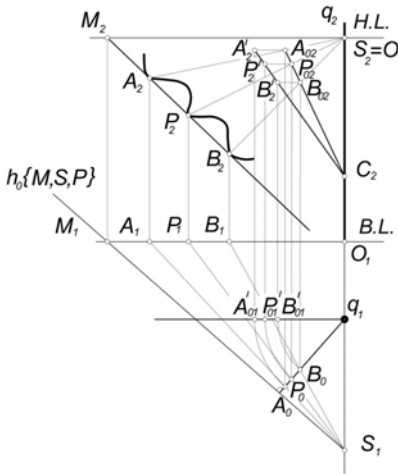


Рис.3. Схема знаходження елемента поверхні обертання при зведенні апарату проєціювання до тривіального випадку.

Площина, що проходить через l і перпендикулярна M, S, B на горизонтальній проєкції будується як перпендикулярна до h_0 . В перетині з твірними конуса вона визначає точки контакту його з поверхнею обертання (точки A_0, P_0, B_0). Обертанням навколо осі q вони переводяться в положення фронтального меридіану поверхні обертання (точки A', P', B'). Твердження 1 і 2, схема на рисунках 1 і 3 та приклад 1 демонструють підхід, яких можемо вважати дискретним на тому підґрунті, що лінія обрису розбивається на кінцеву кількість точок, для кожної з яких в просторі відтворюється коло.

Такий підхід не вимагає додаткових параметричних досліджень, і може бути реалізованим при дотриманні певних умов. Його застосовують, коли головним є відтворення лінії з бажаними естетичними вимогами.

Але є інша задача: вписати поверхню заданого вигляду (зокрема тор) так, щоб її зображення на картині займало певні межі. Межі можуть бути задані багатокутником, окремими прямими та прямими з визначеними на них точками дотику.

Параметричне число поверхонь обертання складається з чотирьох параметрів положення осі обертання та з k параметрів кривої меридіану.

Звернемось до схем на рис.1 та рис.3 і побачимо, що дотична до лінії обрису при заданій осі визначає круговий конус дотичних, а при фіксованій площині меридіану – дотичну до кривої меридіану. Точка на картині, що задана разом з дотичною задає точку з дотичною на меридіані.

По отриманих умовах будується меридіан і визначена ним поверхня обертання. Вона відображається на картину, задовольняючи межі задані на обрисі. При інших положеннях осі, результати моделювання будуть відрізнятися, але всі результати все одно задовольнять вихідні умови.

Твердження 5. Для моделювання поверхні обертання з k -параметричним меридіаном на картині необхідно задати умови еквівалентні завданню k параметрів.

Приклад 2.

Форма і положення тору з заданою віссю залежить від трьох параметрів (2 координати центру твірного кола та його радіус). На рис.4 розглядається схема моделювання в тривіальному випадку. Вісь тору суміщена з картиною. Припустимо, що при точці зору S , бажано, щоб обрис поверхні на картині мав дотичними лінії AB та FP . Точку P призначено точкою дотику.

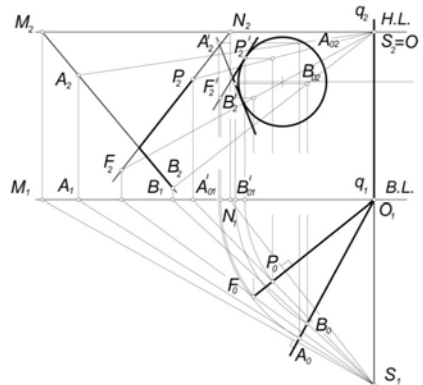


Рис. 4. Моделювання поверхні тору за параметричного схемою

По алгоритму, який описано для схеми тривіального випадку (рис.3) побудовані обмежувальні умови для фронтального меридіану: дотичні прямі $A'B'$ та $F'P'$.

Задача має чотири розв'язання. Наявність точки дотику Р зменшує кількість розв'язань до двох. Але дотичні визначально задаються як орієнтовані відрізки, що забезпечує єдине рішення.

Приклад 3.

Алгоритм параметричного моделювання в загальному випадку розглянемо на прикладі поверхні обертання кривої другого порядку навколо довільної осі, що не є віссю кривої. Перший етап (рис. 5а).

Крива другого порядку залежить від п'яти параметрів. Тому при заданих точці зору і площині симетрії на картині користувач визначає еквівалентні умови – в даному варіанті п'ятикутник в який має бути вписана поверхня.

Другий етап (рис.5б). Визначається вісь поверхні обертання $q \perp \Delta$ точками Q_1 та Q_2 . Через ось q про-

диться довільна площина Π . Вона приймається за площину головного меридіану.

Третій етап (рис.5в). За алгоритмом схеми на рис.1 для всіх прямих п'ятикутника (1...5) будуються прямі так, як для прямих l_i , на рис.1 будувались прямі A_iV_i . Для кожної прямої знаходиться точка C_i , і обертанням навколо осі q прями (1...5) приводяться до положення суміщеного з площиною Π . На ній маємо п'ять дотичних для побудови кривої меридіану. На основі розробок [6] і програмного продукту [7] будуються точки кривої другого порядку.

Четвертий етап (рис. 5г).

Отримана крива другого порядку разом з віссю дозволили побудувати поверхню еліптичного тору, контур якого з обраної точки зору вписано в заданий дотичний п'ятикутник

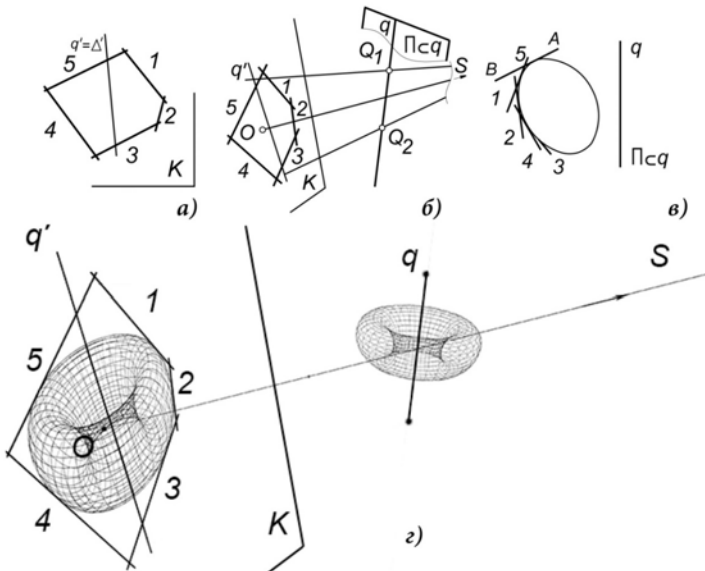


Рис.5. Схема алгоритму і приклад параметричного моделювання в загальному випадку

Дослідження статті виконувались в рамках задачі створення комплексного алгоритму, що об'єднує результати застосування системи AutoCAD [8], 3DsMax, та середовища для розробки 3D-додатків Unity [9]. Техно-

логія комп'ютерного моделювання поверхонь за лініями обрисув викладена в роботі [10].

ВИСНОВКИ

Ми здебільшого користувались поняттям «обгортачий конус», який, складає видиму межу будь якого зображення і в загальному випадку є лише частиною дотичного конусу. Зрозуміло і те, що в точках зникнення видимого контуру лінія контакту не зникає, а стає невидимою. Розроблений апарат однаково сприймає як видимий, так і невидимий контури, а також і лінії кон-

такту, що знаходяться в межах лінії обрису. Справа майстерності та таланту користувача зуміти цим скористатись.

Крім того, вимірність параметричного методу може бути значно підвищена за рахунок використання для ліній меридіанів обводів кривих. Такі обводи в межах однієї дуги не повинні мати точок перегину.

І, нарешті, обидві ці підходи дискретний та параметричний в різних варіантах можуть бути поєднані.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Ivshin K.S. Principy sovremennogo trekhmernogo modelirovaniya v promyshlennom dizajne/ K.S. Ivshin A.F. Basharova// Uralskaya gosud. arkhitekturno-khudozhestvennaya akademiya. Arkhitekton: izvestiya vuzov №39. – 2012. – S.101-113
2. Botvinovs'ka S.I. Geometrychne modeljuvannja poverhon' iz zadanyimi vlastyvosjtajmy u dyzajni ta arhitekturi/ S.I. Botvinovs'ka, Koval'ov S.M., Zolotova A.V./Upravlinnja rozvytkom skladnyh system. – K.: KNUBA. 2016. – №25. – S.121-125
3. Botvinovska S.I. Formoutvorennja diskretnih poverhon v arhitekturi ta dizajn-proektuvanni/ S.I.Botvinovska // Problemy informacnyh tehnologij. – 2016. – №19. – S.192-199.
4. Sazonov K.O. Modeljuvannja poverkhon obertannja na perspektivnykh zobrazhenniakh/ K.O.Sazonov, H.H. Sulimenko., S.Ju. Sulimenko // Suchasni problemy modeljuvannja : zb. Nauk. prots. – Melitopol: Vydavnytstvo MDPU im. B. Khmelnytskoho, – 2016. – Vyp.5. – S.110-116
5. Sulimenko S.Ju. Pobudova ploshhyny symetrii' konusa, dotychnogo do poverhni obertannja, za eskizom linii' obrysu/ S.Ju. Sulimenko, V.O.Anpilogova, G.G. Sulimenko// Visnyk HNTU №3(62), tom 2 «Prykladna geometrija ta komp'juterni tehnologii» – Har'kov.: 2017. – S.337-341.
6. Korotkij V.A. Sinteticheskie algoritmy postroeniya krivoj-vtorogo porjadka/ Korotkij V.A.// Vesnik kompyuternykh sh informacnyh tehnologij №11. – Yuzhno-ural'skij gosudarstvennyj-universitet. – 2014. S.20-24
7. Korotkij V.A. Programma dlya EVM postroenie krivoj vtorogo porjadka prokhodyashhej cherez dannje točki i kasajushhiesya dannyh pryamykh/ V.A. Korotkij// Svidetelstvo o gosudarstvennoj registracii №2011611961 ot 04.03.2011.
8. About Modeling 3D Objects [Electronic resource] // AUTODESK KNOWLEDGE NETWORK. – 2017. – Resource access mode: <https://knowledge.autodesk.com/support/autocad/getting-started/caas/CloudHelp/cloudhelp/2018/ENU/AutoCAD-Core/files/GUID-9DACE807-BC9D-4357-B47E-C6199F6AF1A2-htm.html>
9. Unity 2017 Functionality [Electronic resource] // Unity Technologies. – 2017. – Resource access mode: <https://unity3d.com/ru/unity>.
10. Sulimenko S.Ju. Tehnologija komp'juternogo modeljuvannja ob'ektiv dyzajnu za linijamy obrysu poverhon' obertannja/ S.Yu. Sulimenko, K.O.Sazonov, V.O.Anpilogova, Zh.G.Levina. Suchasni problemy arhitektury ta mistobuduvannja: naukovo-tehnicnij zb. KNUBA – K.:Vydavnytstvo KNUBA, – 2017. – Vyp.45. – S.195-201.

Рецензент: д.т.н., проф., Плоский В.О.,
Завідувач кафедри архітектури конструкцій КНУБА