

УДК 621.01

[https://doi.org/ 10.35546/kntu2078-4481.2019.4.4](https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2019.4.4)

Ю.Е. МЕШКОВ

Херсонський національний технічний університет

ORCID: 0000-0002-2506-7020

## СТАТИКА МЕХАНІЗМІВ

*У статті розглядаються методи статичного аналізу, який полягає в визначенні узагальнених сил, що врівноважують і реакції зв'язків. Рівняння рівноваги механізму можуть бути використані для: визначення похідних від функцій положення; по вхідним координатам і параметрам кінематичної схеми в зв'язку з дослідженням механізмів і аналізом точності машини. Рівняння рівноваги дозволяють визначити особливі положення механізму, що має велике значення для машин з великою кількістю двигунів.*

*Статичний аналіз проводиться в напрямку, протилежному геометричному і кінематичному розрахункам, тобто починається від структурних груп останнього структурного шару і закінчується групами, які першими приєднуються до стійки.*

*Представляється цілком достатнім називати групи по кількості ланок в них - двохланкові, чотирьохланкові, шестиланкові, восьмиланкові і десятиланкові.*

*Окрім відповідності формули Чебишева, групи Ассура повинні задовольняти умові елементарності, а саме, такі групи не повинні розпадатися на простіші, і відповідати умовам рівноваги від моментів що на них діють.*

*Умови рівноваги механізму (механічної системи з ідеальними зв'язками) можуть бути отримані за допомогою принципу можливих переміщень, відповідно до якого сумарна робота всіх активних сил на будь-якому можливому переміщенні повинна дорівнювати нулю.*

*Принцип можливих переміщень застосовується також для визначення реакцій звільняючих зв'язків. Для цього механізм послідовно звільняється від одного з зв'язків. При цьому на одиницю збільшується його кількість ступенів вільності. В результаті з'являється нове можливе переміщення, яке раніше не допускалося цим зв'язком. Дія зв'язку замінюється відповідною реакцією, яку включають до складу активних сил. Далі підраховується робота всіх діючих активних сил на новому можливому переміщенні системи. Прирівнявши до нуля можливу роботу цих сил, отримаємо рівняння для визначення шуканої реакції.*

*Вказаний метод визначення сил (активних або реакцій зв'язків) має важливу перевагу перед іншими методами: кожна з невідомих сил визначається незалежно від інших розв'язанням одного рівняння.*

*Ключові слова: умови рівноваги механізму, групи Ассура, ступінь вільності, кількість ланок, класифікаційні параметри, активні сили, замкнуті змінювані контури.*

Ю.Е. МЕШКОВ

Херсонский национальный технический университет

ORCID: 0000-0002-2506-7020

## СТАТИКА МЕХАНИЗМОВ

*В статье рассматриваются методы статического анализа, который заключается в определении обобщенных сил, уравновешивающих и реакций связи. Уравнения равновесия механизма могут быть использованы для: определения производных от функций положения; по входным координатам и параметрам кинематической схемы в связи с исследованием механизмов и анализом точности машины. Уравнения равновесия позволяют определить особые положения механизма, имеет большое значение для машин с большим количеством двигателей.*

*Статический анализ проводится в направлении, противоположном геометрическому и кинематическому расчетам, то есть начинается от структурных групп последнего структурного слоя и заканчивается группами, которые первыми присоединяются к стойке.*

*Представляется вполне достаточным называть группы по количеству звеньев в них – двухзвенные, четырёхзвенные, шестизвенные, восьмизвенные и десятизвенные.*

*Кроме соответствия формулы Чебышева, группы Ассура должны удовлетворять условию элементарности, а именно, такие группы не должны распадаться на более простые, и отвечать условиям равновесия от моментов, действующих на них.*

*Условия равновесия механизма (механической системы с идеальными связями) могут быть получены с помощью принципа возможных перемещений, согласно которому суммарная работа всех активных сил на любом возможном перемещении должна равняться нулю*

Принцип возможных перемещений применяется также для определения реакций освобождающих связей. Для этого механизм последовательно освобождается от одной из связей. При этом на единицу увеличивается его количество степеней свободы. В результате появляется новое возможное перемещение, которое ранее не допускалось этой связью. Действие связи заменяется соответствующей реакцией, которую включают в состав активных сил. Далее подсчитывается работа всех действующих активных сил, на новом возможном перемещении системы. Приравняв к нулю возможную работу этих сил, получим уравнение для определения искомой реакции.

Указанный метод определения сил (активных или реакций связей) имеет важное преимущество перед другими методами: каждая из неизвестных сил определяется независимо от других решением одного уравнения.

Ключевые слова: условия равновесия механизма, группы Ассур, степень свободы, количество звеньев, классификационные параметры, активные силы, замкнутые изменяемые очертания.

Yu.Ye. MIESHKOV  
Kherson National Technical University  
ORCID: 0000-0002-2506-7020

## STATIC OF MECHANISMS

*The article deals with the methods of static analysis, which is to determine the generalized balancing forces and the reactions of bonds. The equilibrium equations of the mechanism can be used to: determine derivatives of position functions; on the input coordinates and parameters of the kinematic circuit in connection with the study of mechanisms and analysis of the accuracy of the machine. Equilibrium equations make it possible to determine the specific positions of the mechanism, which is of great importance for machines with many engines.*

*Static analysis is performed in the direction opposite to geometric and kinematic calculations, that is, it starts from the structural groups of the last structural layer and ends with the groups that are the first to join the rack.*

*It seems quite sufficient to name groups by the number of links in them - two-link, four-link, six-link, eight-link and ten-link.*

*In addition to conforming to Chebyshev's formula, Assur groups must satisfy the elementary condition, namely, such groups should not break up into simpler ones, and satisfy the equilibrium conditions from the moments that affect them.*

*The equilibrium conditions of the mechanism (mechanical system with perfect couplings) can be obtained by the principle of possible displacements, according to which the total work of all active forces on any possible displacement must be equal to zero.*

*The principle of possible displacements is also applied to determine the reactions of releasing bonds. To do this, the mechanism is consistently released from one of the links. In this case, the number of degrees of freedom increases by one. The result is a new possible move that was not previously allowed by this connection. The action of communication is replaced by an appropriate reaction, which is included in the active forces. The work of all active forces on the new possible displaced system is then calculated. Equating to zero the possible operation of these forces, we obtain the equation to determine the desired reaction.*

*The specified method of determining forces (active or coupling reactions) has an important advantage over other methods: each of the unknown forces is determined independently of the other by solving one equation.*

*Keywords: mechanism equilibrium conditions, Assur groups, degree of freedom, number of units, classification parameters, active forces, closed variable circuits.*

## Постановка проблеми

Механізми призначені не тільки для отримання необхідних рухів вихідних ланок, а й для передачі сил. При невдалому виборі геометричних параметрів кінематичної схеми, механізм може виявитися непрацездатним через неприпустимо великі зусилля, що виникають в його кінематичних парах. Тому вже на стадії кінематичного синтезу, тобто до розробки деталей і вузлів конструкції, повинні бути проаналізовані умови передачі сил механізмом.

## Аналіз останніх досліджень і публікацій

Дослідження геометричних умов передачі сил називається статичним аналізом механізму. Цей аналіз ведеться за допомогою спрощеної статичної моделі, що враховує тільки зусилля які врівноважують (узагальнені рушійні сили, які утримують механізм в стані рівноваги), робочі навантаження і реакції зв'язків[1-3]. При цьому не враховуються маси ланок і сили тертя. У цих умовах рівняння динаміки перетворюються в рівняння статички, хоч і описує рух механізму. По суті, при статичному аналізі досліджуються рівняння рівноваги механізму в різних його положеннях.

**Формулювання мети дослідження**

Метою роботи було визначення умов рівноваги ланок механізму графічним або аналітичними методами.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Завданням статичного аналізу є визначення узагальнених сил, що врівноважують і реакцій зв'язків. Рівняння рівноваги механізму можуть бути використані для визначення похідних від функцій положення по вхідним координатам і параметрам кінематичної схеми в зв'язку з дослідженням механізмів з пружними ланками і аналізом точності машини. Рівняння рівноваги дозволяють визначити особливі положення механізму, що має велике значення для машин з великою кількістю двигунів.

Статичний аналіз проводиться в напрямку, протилежному геометричному і кінематичному розрахункам, тобто починається від структурних груп останнього структурного шару і закінчується групами, які першими приєднуються до стійки.

У плоскому механізмі визначаються зусилля які врівноважують і реакції тільки зв'язків звільняючих, що лежать в площині руху ланок. При цьому використовуються рівняння рівноваги всієї структурної групи або її окремих ланок.

Завдання на рівновагу ланок механізму вирішуються графічним або аналітичними методами. З силовим розрахунком важільних механізмів по статичній моделі познайомимося на деяких прикладах [1-4].

**1. Графоаналітичний метод**

Визначення сил, що діють в механізмі, графоаналітичним методом здійснюється за допомогою векторних рівнянь і планів сил що їм відповідають.

Приклад 1. Визначимо сили, що врівноважують і реакції в кінематичних парах навантажувача, показаного на рис. 1,а. Робоче навантаження в даному положенні механізму  $P = 30 \text{ кН}$ .

Розглянемо рівновагу ковша 8. На нього діють три сили: робоче навантаження  $P$  і дві реакції зв'язків  $R_{78}, R_{38}$ . Оскільки на невагомому ланку 7 діють дві сили, то реакція  $R_{78}$  спрямована вздовж прямої  $EE'$ . На підставі теореми про три непаралельних сили  $P, R_{78}, R_{38}$  робимо висновок, що лінії дії цих сил повинні перетнутися в одній точці  $K$  - точці перетину ліній дії сил  $P, R_{78}$ .

Для знаходження невідомих реакцій запишемо рівняння рівноваги ковша:  $P + R_{78} + R_{38} = 0$  і побудуємо план сил (рис. 1,б), з якого визначимо  $R_{78} = 34 \text{ кН}, R_{38} = 52 \text{ кН}$ .

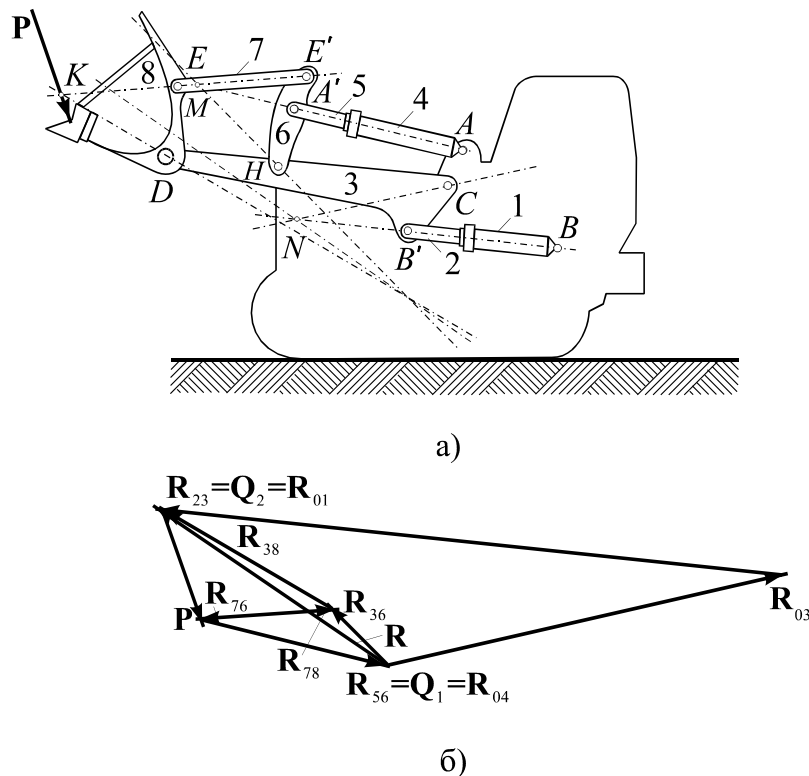


Рис. 1. Схема сил і реакцій в кінематичних парах навантажувача

З рівнянь рівноваги ланки 7:  $R_{87} + R_{67} = 0$  знайдемо  $R_{67} = -R_{87} = R_{78}$ . Ланка 6 знаходиться в рівновазі під дією трьох сил:  $R_{76}$ ,  $R_{56}$ , і  $R_{36}$ . Лінії дії зазначених сил перетнуться в точці  $M$  - точці перетину ліній дії сил  $R_{76}$ ,  $R_{56}$ , (реакція  $R_{56}$  спрямована вздовж прямої  $AA'$ ). З рівнянь рівноваги ланки 6  $P + R_{78} + R_{38} = 0$ : і плану сил знайдемо  $R_{36} = 20 \text{ кН}$ ,  $R_{56} = 50 \text{ кН}$ .

З рівноваги ланок 4 і 5:  $R_{65} + Q_1 = 0$ ,  $-Q_1 + R_{04} = 0$  визначимо силу, що врівноважує  $Q_1 = -R_{65} = R_{56}$  і реакцію  $R_{04} = Q_1$ .

На ланку 3 діють чотири сили,  $R_{83}$ ,  $R_{63}$ ,  $R_{23}$  та  $R_{03}$ . При цьому дія відомих сил  $R_{83} = -R_{38}$  і  $R_{63} = -R_{36}$  може бути замінено рівнодіючою:  $R = R_{83} + R_{63}$ . Лінія дії сили  $R_{23}$  спрямована вздовж прямої  $BB'$ . Точка  $N$  - точка перетину ліній дії сил  $R_{23}$  і  $R$  є точкою перетину трьох сил  $R$ ,  $R_{23}$ , і  $R_{03}$ . З рівняння рівноваги ланки 3:  $R + R_{03} + R_{23} = 0$  за допомогою плану сил знайдемо  $R_{03} = 106 \text{ кН}$ ,  $R_{23} = 164 \text{ кН}$ .

З рівнянь рівноваги ланок 2 і 1:  $R_{32} + Q_2 = 0$ ,  $-Q_2 + R_{01} = 0$  визначимо  $Q_2 = -R_{32} = R_{23}$ ,  $R_{01} = Q_2$ .

2. Векторний метод визначення сил

Статичний розрахунок механізму може здійснюватися спільним рішенням векторних рівнянь рівноваги, складених для кожної ланки окремо.

Приклад 2. Визначимо реакції в кінематичних парах важільного механізму, показаного на рис. 2,а, і момент що врівноважує  $Q$ , якщо до вихідної ланки 7 в заданому положенні прикладений навантажувальний момент  $M = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

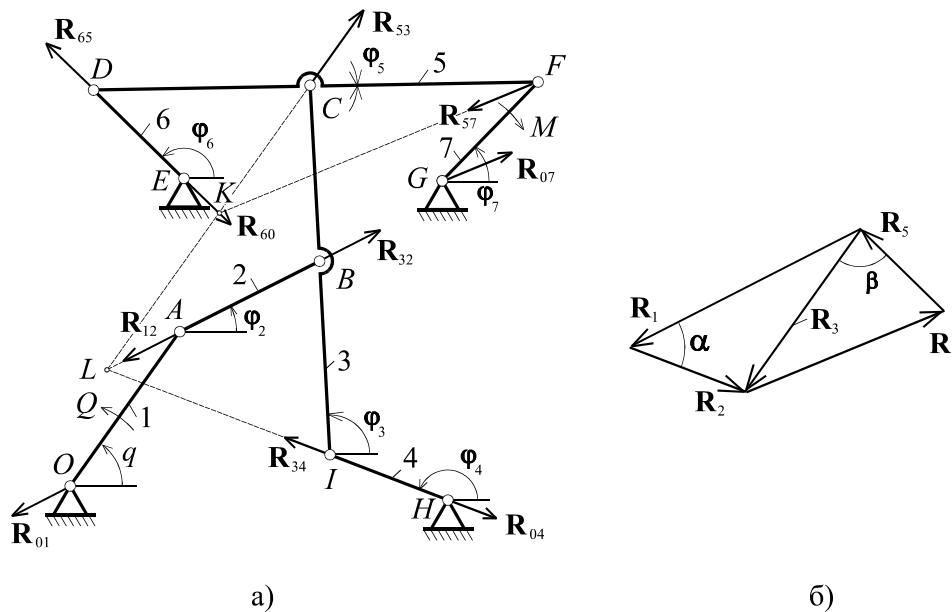


Рис. 2. Схема реакцій в кінематичних парах важільного механізму

Геометричні параметри механізму:  $q = \pi/3$ ;  $l_{OA} = 4 \text{ м}$ ;  $l_{AB} = x_E = 2 \text{ м}$ ;  $l_{BI} = 2\sqrt{3} \text{ м}$ ;  $l_{HI} = 2\sqrt{5-2\sqrt{3}} \text{ м}$ ;  $l_{DC} = 2 + \sqrt{3} \text{ м}$ ;  $l_{DF} = l_{ED} = l_{GF} = 2\sqrt{2} \text{ м}$ ;  $l_{CB} = 7 - 2\sqrt{3} \text{ м}$ ;  $l_{CI} = 7 \text{ м}$ ;  $y_H = 0$ ;  $x_H = y_E = x_G = y_G = 6 \text{ м}$ .

Спочатку з системи рівнянь геометричного аналізу:

$$\left. \begin{aligned} \ell_{AB} \cos \varphi_2 - \ell_{BI} \cos \varphi_3 - \ell_{HI} \cos \varphi_4 &= x_H - \ell_{OA} \cos q, \\ \ell_{AB} \sin \varphi_2 - \ell_{BI} \sin \varphi_3 - \ell_{HI} \sin \varphi_4 &= y_H - \ell_{OA} \sin q, \\ \ell_{CI} \cos \varphi_3 + \ell_{HI} \cos \varphi_4 + \ell_{CF} \cos \varphi_5 - \ell_{GF} \cos \varphi_7 &= x_G - x_H, \\ \ell_{CI} \sin \varphi_3 + \ell_{HI} \sin \varphi_4 + \ell_{CF} \sin \varphi_5 - \ell_{GF} \sin \varphi_7 &= y_G - y_H, \\ \ell_{CI} \cos \varphi_3 + \ell_{HI} \cos \varphi_4 - \ell_{DC} \cos \varphi_5 - \ell_{ED} \cos \varphi_6 &= x_E - x_H, \\ \ell_{CI} \sin \varphi_3 + \ell_{HI} \sin \varphi_4 - \ell_{DC} \sin \varphi_5 - \ell_{ED} \sin \varphi_6 &= y_E - y_H \end{aligned} \right\}$$

При заданому збиранні ланок визначимо групові координати:  $\varphi_2 = 30^\circ$ ;  $\varphi_3 = 90^\circ$ ;  $\varphi_5 = 0^\circ$ ;  $\varphi_4 = 156,2^\circ$ ;  $\varphi_6 = 135^\circ$ ;  $\varphi_7 = 45^\circ$ ,

де  $\ell_{CI} = \ell_{CB} + \ell_{BI}$ .

Векторні рівняння рівноваги рухомих ланок механізму мають такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} R_{01} + R_{21} &= 0, & Q + \left| \ell_{OA} \times R_{21} \right|_z &= 0, \\ R_{32} + R_{12} &= 0, & \left| \ell_{AB} \times R_{32} \right|_z &= 0, \\ R_{43} + R_{23} + R_{53} &= 0, & \left| \ell_{CB} \times R_{23} \right|_z + \left| \ell_{CI} \times R_{43} \right|_z &= 0, \\ R_{04} + R_{34} &= 0, & \left| \ell_{HI} \times R_{34} \right|_z &= 0, \\ R_{35} + R_{65} + R_{75} &= 0, & \left| \ell_{DC} \times R_{65} \right|_z + \left| \ell_{CF} \times R_{75} \right|_z &= 0, \\ R_{06} + R_{56} &= 0, & \left| \ell_{ED} \times R_{56} \right|_z &= 0, \\ R_{07} + R_{57} &= 0, & -M + \left| \ell_{GF} \times R_{57} \right|_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Якщо ввести позначення (рис. 2,б):

$$\left. \begin{aligned} R_1 = R_{01} = R_{12} = R_{23}, \quad R_2 = R_{04} = R_{43}, \\ R_4 = R_{07} = R_{75}, \quad R_5 = R_{06} = R_{65}, \\ R_3 = R_1 + R_2 = R_{35} = -R_4 - R_5, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

то рівняння рівноваги моментів переписуться в формі:

$$\left. \begin{aligned} Q - \left| \ell_{OA} \times R_1 \right|_z &= 0, \\ \left| \ell_{CB} \times R_1 \right|_z + \left| \ell_{CI} \times R_2 \right|_z &= 0, \\ \left| \ell_{DC} \times R_5 \right|_z + \left| \ell_{CF} \times R_4 \right|_z &= 0, \\ -M - \left| \ell_{GF} \times R_4 \right|_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Із записаних вище рівнянь випливає, що вектори  $\ell_{AB}$  і  $R_1$ ,  $\ell_{HI}$  і  $R_2$ ,  $\ell_{ED}$  і  $R_5$  колінеарні, тобто:

$$R_1 = \mu_1 \ell_{AB}, \quad R_2 = \mu_2 \ell_{HI}, \quad R_5 = \mu_5 \ell_{ED},$$

Де  $\mu_1, \mu_2$  і  $\mu_5$  - коефіцієнти пропорційності.

З урахуванням (2) і (3) рівняння рівноваги моментів для шестиланкової групи Ассура приймуть наступний вид:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 &= 0, \\ \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_5 b_3 &= 0, \\ \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \mu_5 c_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} a_1 &= \ell |1_{CB} \times 1_{AB}|_z = \ell_{CB} \ell_{AB} \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = -6,124 \text{ м}^2; \\ a_2 &= |\ell_{CI} \times 1_{HI}|_z = \ell_{CI} \ell_{HI} \sin(\varphi_4 - \varphi_3) = 15,876 \text{ м}^2; \\ b_1 &= -|\ell_{CF} \times \ell_{AB}|_z = \ell_{CF} \ell_{AB} \sin(\varphi_5 - \varphi_2) = -4,268 \text{ м}^2; \\ b_2 &= -|\ell_{CF} \times \ell_{HI}|_z = \ell_{CF} \ell_{HI} \sin(\varphi_5 - \varphi_4) = -4,268 \text{ м}^2; \\ b_3 &= |\ell_{DC} \times \ell_{ED}|_z - |\ell_{CF} \times \ell_{ED}|_z = \ell_{DF} \ell_{ED} \sin(\varphi_6 - \varphi_5) = 16 \text{ м}^2; \\ c_1 &= |\ell_{GF} \times \ell_{AB}|_z = \ell_{GF} \ell_{AB} \sin(\varphi_7 - \varphi_2) = 1,464 \text{ м}^2; \\ c_2 &= -|\ell_{GF} \times \ell_{HI}|_z = \ell_{GF} \ell_{HI} \sin(\varphi_7 - \varphi_4) = -6,536 \text{ м}^2; \\ c_3 &= -|\ell_{GF} \times \ell_{ED}|_z = \ell_{GF} \ell_{ED} \sin(\varphi_6 - \varphi_7) = 8 \text{ м}^2. \end{aligned}$$

З лінійної системи рівнянь (4) знайдемо коефіцієнти пропорційності:

$$\mu_1 = -\frac{a_2 b_2 M}{J} = 5,263 \frac{H}{M}; \quad \mu_2 = \frac{a_1 b_3 M}{J} = 2,03 \frac{H}{M}; \quad \mu_5 = \frac{(b_1 a_2 - a_1 b_2) M}{J} = 1,946 \frac{H}{M},$$

де якобіан системи рівнянь геометричного аналізу:

$$J = a_1(b_3 c_2 - b_2 c_3) + a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) = -482,605 \text{ м}^6. \quad (5)$$

Тоді модулі реакцій відповідно рівні:

$$\begin{aligned} R_1 = R_{01} = R_{12} = R_{23} &= \mu_1 \ell_{AB} = 10,527 \text{ Н}; \quad R_2 = R_{01} = R_{12} = R_{23} = \mu_2 \ell_{AB} = 10,527 \text{ Н}; \\ R_5 = R_{65} = R_{06} &= \mu_5 \ell_{ED} = 5,503 \text{ Н}; \quad R_3 = \sqrt{R_1^2 + R_1^2 - 2R_1 R_2 \cos \alpha} = 8,576 \text{ Н}; \\ R_4 &= \sqrt{R_3^2 + R_5^2 - 2R_3 R_5 \cos \beta} = 9,065 \text{ Н}, \end{aligned}$$

де  $\alpha = \varphi_2 - \varphi_4 + 180^\circ = 53,8^\circ$ ;

$$\beta = \angle BAC + \varphi_6 - \varphi_4 = 76,687^\circ; \quad \angle BAC = 180^\circ - \arcsin(R_1 \sin \alpha / R_3) = 97,887^\circ$$

Момент, що врівноважує з першого рівняння системи (3) дорівнює:

$$Q = \mu_1 \ell_{OA} \ell_{AB} \sin(q - \varphi_2) = 21,053 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

### 3. Метод розмикання кінематичного ланцюга

Цей метод базується на умовному розмиканні деяких кінематичних пар з тим, щоб кінематична ланцюг придбала структуру «дерево». Метод застосуємо для всього механізму в цілому і для окремих структурних груп. При цьому рівняння рівноваги складаються в формі рівнянь моментів щодо осей шарнірів, і рівнянь проекцій сил на осі, відповідні лінійним координатам.

Приклад 3. Визначимо врівноважує момент  $Q$  і реакції в кінематичних парах механізму, зображеного на рис. 2,а.

Умовно розіміємо механізм в шарнірах  $H, E$  і  $G$  для того, щоб кінематичний ланцюг придбав структуру «дерево» (рис. 3), а дію зв'язків замінимо відповідними проекціями реакцій.

Для визначення цих сил і моменту, що врівноважує складемо рівняння рівноваги відкритого кінематичного ланцюга:

$$\begin{aligned} \sum M_I &= R_{04x}(y_I - y_H) + R_{04y}(x_H - x_I) = 0, \\ \sum M_F &= R_{07x}(y_F - y_G) - R_{07y}(x_F - x_G) - M = 0, \end{aligned}$$

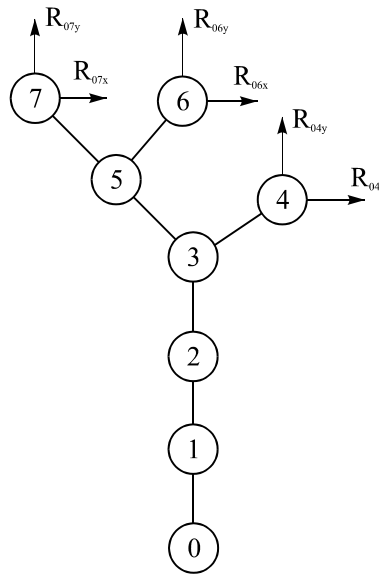


Рис. 3. Схема кінематичного ланцюга структурою «дерево»

$$\begin{aligned} \sum M_D &= R_{06x}(y_D - y_E) + R_{06y}(x_E - x_D) = 0, \\ \sum M_C &= R_{06x}(y_C - y_E) - R_{06y}(x_C - x_E) + R_{07x}(y_C - y_G) + R_{07y}(x_G - x_C) - M = 0, \\ \sum M_B &= R_{04x}(y_B - y_H) + R_{04y}(x_H - x_B) - R_{06x}(y_E - y_B) + R_{06y}(x_B - x_E) - \\ &\quad - R_{07x}(y_G - y_B) + R_{07y}(x_G - x_B) - M = 0, \\ \sum M_A &= R_{04x}(y_A - y_H) + R_{04y}(x_H - x_A) - R_{06x}(y_E - y_A) - R_{06y}(x_A - x_E) - \\ &\quad - R_{07x}(y_G - y_A) + R_{07y}(x_G - x_A) - M = 0, \\ \sum M_O &= Q + R_{04x}(y_O - y_H) + R_{04y}(x_H - x_O) - R_{06x}(y_E - y_O) + R_{06y}(x_E - x_O) - \\ &\quad - R_{07x}(y_G - y_O) + R_{07y}(x_G - x_O) - M = 0, \end{aligned}$$

де  $x_O = y_O = x_D = 0$ ;  $x_A = 2$  м;  $y_A = 2\sqrt{3}$  м;  $x_B = x_I = x_C = 2 + \sqrt{3}$  м;  $y_I = 1$  м;  
 $y_B = 2\sqrt{3} + 1$  м;  $y_C = y_D = y_F = x_F = 8$  м.

З перших шести рівнянь рівноваги визначимо проекції реакцій:

$$\begin{aligned} R_{04x} = -R_{34x} &= \frac{J_{04x}}{J} = 4,605 \text{ Н}; & R_{04y} = -R_{34y} &= \frac{J_{04y}}{J} = -2,03 \text{ Н}; \\ R_{06x} = -R_{56x} &= \frac{J_{06x}}{J} = -3,891 \text{ Н}; & R_{06y} = -R_{56y} &= \frac{J_{06y}}{J} = 3,891 \text{ Н}; \\ R_{07x} = -R_{57x} &= \frac{J_{07x}}{J} = 8,403 \text{ Н}; & R_{07y} = -R_{57y} &= \frac{J_{07y}}{J} = 3,403 \text{ Н}, \end{aligned}$$

де якобіан системи групових рівнянь:

$$J = \begin{vmatrix} y_I - y_H & x_H - x_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_F - y_G & x_G - x_F \\ 0 & 0 & y_D - y_E & x_E - x_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_C - y_E & x_E - x_C & y_C - y_G & x_G - x_C \\ y_B - y_H & x_H - x_B & y_B - y_E & x_E - x_B & y_B - y_G & x_G - x_B \\ y_A - y_H & x_H - x_A & y_A - y_E & x_E - x_A & y_A - y_G & x_G - x_A \end{vmatrix} = -482,605 \text{ м}^6. \quad (6)$$

Тоді:

$$R_{35x} = R_{56x} + R_{57x} = -4,511 \text{ Н}; R_{35y} = R_{56y} + R_{57y} = -7,294 \text{ Н}$$

З останнього рівняння рівноваги знайдемо:

$$Q = -R_{04x}(y_O - y_H) - R_{04y}(x_H - x_O) + R_{06x}(y_E - y_O) - R_{06y}(x_E - x_O) + R_{07x}(y_G - y_O) - R_{07y}(x_G - x_O) + M = 21,053 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Приклад 4. Визначити сили, що врівноважують  $Q_1$  і  $Q_2$  а також реакції в кінематичних парах навантажувача (рис. 4). Робоче навантаження  $P = 20 \text{ кН}$ . Геометричні параметри механізму:

$$\begin{aligned} \ell_{OA} &= \ell_1 + \ell_2 + q_1 = 0,8\sqrt{3} \approx 1,386 \text{ м}; \ell_{BA} = 1,2 \text{ м}; \ell_{BE} = (4,4\sqrt{\frac{3}{3}} - 1,6 \approx 0,940 \text{ м}; \ell_{GH} = 0,8 \text{ м}; \\ \ell_{DE} &= 0,4\sqrt{3} \text{ м}; \ell_{FG} = 1,6 \text{ м}; \ell_{EH} = \frac{0,8(6 - \sqrt{3})}{3} \approx 1,138 \text{ м}; x_0 = y_0 = 0; x_B = 0,8\sqrt{3} \approx 1,386 \text{ м}; \\ x_C &= 0; y_C = \frac{0,8(2\sqrt{3} - 1)}{3} = 0,657 \text{ м}; \gamma = 90^\circ; y_M = 2 \text{ м}. \end{aligned}$$

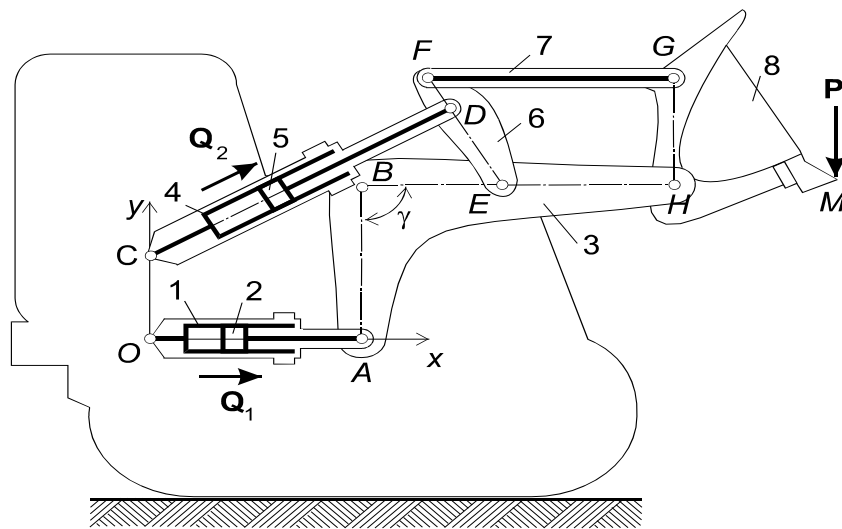


Рис. 4. Схема сил, що врівноважують  $Q_1$  і  $Q_2$  а також реакції в кінематичних парах навантажувача

Механізм навантажувача складається з двох однорухомих трьохланкових груп (ланки 1,2,3 і 4,5,6) і груп Ассур - ланки 7,8.

З трьох систем групових рівнянь:



$$\left. \begin{aligned} (\ell_1 + \ell_2 + q_1) \cos \varphi_{10} - \ell_{BA} \cos \varphi_{30} &= x_B - x_O, \\ (\ell_1 + \ell_2 + q_1) \sin \varphi_{10} - \ell_{BA} \sin \varphi_{30} &= y_B - y_O, \\ (\ell_4 + \ell_5 + q_2) \cos \varphi_{40} - \ell_{DE} \cos(\varphi_{30} + \gamma + \varphi_{63}) &= x_B + \ell_{BE} \cos(\varphi_{30} + \gamma) - x_C, \\ (\ell_4 + \ell_5 + q_2) \sin \varphi_{40} - \ell_{DE} \sin(\varphi_{30} + \gamma + \varphi_{63}) &= y_B + \ell_{BE} \sin(\varphi_{30} + \gamma) - y_C, \\ \ell_{FG} \cos(\varphi_{30} + \gamma + \varphi_{63} + \varphi_{76}) - \ell_{GH} \cos(\varphi_{30} + \gamma + \varphi_{83}) &= \\ \ell_{EH} \cos(\varphi_{30} + \gamma) - \ell_{EF} \cos(\varphi_{30} + \gamma + \varphi_{63}), \\ \ell_{FG} \sin(\varphi_{30} + \gamma + \varphi_{63} + \varphi_{76}) - \ell_{GH} \sin(\varphi_{30} + \gamma + \varphi_{83}) &= \\ \ell_{EH} \sin(\varphi_{30} + \gamma) - \ell_{EF} \sin(\varphi_{30} + \gamma + \varphi_{63}) &= \end{aligned} \right\}$$

при заданому складанні ланок визначимо послідовно групові координати:  $\varphi_{10} = 0^0$ ;  $\varphi_{30} = 270^0$ ;

$$\varphi_{40} = 30^0; \varphi_{63} = 120^0; \varphi_{83} = 90^0; \varphi_{76} = 240^0.$$

За допомогою групових координат знайдемо координати шарнірів:

$$\begin{aligned} x_M &= 2,8\sqrt{3} \text{ м}; x_G = x_H = 2\sqrt{3} \text{ м}; x_F = (2\sqrt{3} - 1,6) \text{ м}; x_C = x_O = 0; x_A = 0,8\sqrt{3} \text{ м}; y_H = y_E = 1,2 \text{ м}; \\ x_D &= [(6,2 - \sqrt{3})/3 - 1,6] \text{ м}; x_E = [(6,8\sqrt{3})/3 - 1,6] \text{ м}; y_M = y_G = y_F = 2 \text{ м}; y_D = 1,8 \text{ м}; \\ y_C &= \frac{0,8(2\sqrt{3} - 1)}{3} \text{ м}. \end{aligned}$$

Умовно роз'єднаємо групу Ассура в шарнірі Н. Дію відкинутих зв'язків замінімо силами  $R_{38x}$  і  $R_{38y}$ . 3 рівнянь рівноваги відкритої кінематичної ланки, що створена ланками 8 і 7:

$$\begin{aligned} \sum M_G &= -P(x_M - x_G) + R_{38y}(x_H - x_G) + R_{38x}(y_G - y_H) = 0, \\ \sum M_F &= -P(x_M - x_F) + R_{38y}(x_H - x_F) + R_{38x}(y_F - y_H) = 0 \end{aligned}$$

Визначимо:

$$\begin{aligned} R_{38x} &= P \frac{(x_M - x_G)(x_H - x_F) - (x_M - x_F)(x_H - x_G)}{(y_G - y_H)(x_H - x_E) - (y_F - y_H)(x_H - x_G)} = 20\sqrt{3} \text{ кН}, \\ R_{38y} &= P \frac{(y_G - y_H)(x_M - x_F) - (y_F - y_H)(x_M - x_G)}{(y_G - y_H)(x_H - x_F) - (y_F - y_H)(x_H - x_G)} = 20 \text{ кН}, R_{38} = 40 \text{ кН}. \end{aligned}$$

За допомогою рівнянь рівноваги окремих ланок 8 і 7:

$$\begin{aligned} \sum F_{x8} &= R_{78x} + R_{38x} = 0, & \sum F_{x7} &= R_{87x} + R_{67x} = 0, \\ \sum F_{y8} &= R_{78y} + R_{38y} - P = 0, & \sum F_{y7} &= R_{87y} + R_{67y} = 0 \end{aligned}$$

знайдемо:

$$\begin{aligned} R_{78x} &= -20\sqrt{3} \text{ кН}; R_{78y} = 0 \text{ кН}; R_{78} = 20\sqrt{3} \text{ кН}; \\ R_{67x} &= -20\sqrt{3} \text{ кН}; R_{67y} = 0 \text{ кН}; R_{67} = 20\sqrt{3} \text{ кН}. \end{aligned}$$

В подальшому роз'єднаємо кінематичну ланку механізму в шарнірі Е. Складемо рівняння рівноваги відкритої кінематичної ланки, що складається з ланок 6, 4 і 5:

$$\begin{aligned}\sum M_D &= -R_{76y}(x_D - x_F) - R_{76x}(y_F - y_D) + R_{36y}(x_E - x_D) + R_{36x}(y_D - y_E) = 0, \\ (\sum F)_{DC} &= (R_{76y} + R_{36y})\sin 30^\circ + (R_{76x} + R_{36x})\cos 30^\circ + Q_2 = 0, \\ \sum M_C &= R_{76y}(x_F - x_C) - R_{76x}(y_F - y_C) + R_{36y}(x_E - x_C) - R_{36x}(y_E - y_C) = 0.\end{aligned}$$

З цих рівнянь визначимо реакції:

$$\begin{aligned}R_{36x} &= \frac{F_x(x_E - x_C) - F_y(x_E - x_D)}{(y_D - y_E)(x_E - x_C) - (y_C - y_E)(x_E - x_D)} = 0 \text{ кН}, \\ R_{36y} &= \frac{F_y(y_D - y_E) - F_x(y_C - y_E)}{(y_D - y_E)(x_E - x_C) - (y_C - y_E)(x_E - x_D)} = 20 \text{ кН},\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}F_x &= R_{76y}(x_D - x_F) + R_{76x}(y_F - y_D) = 4\sqrt{3} \text{ кН}, \\ F_y &= R_{76y}(x_C - x_F) + R_{76x}(y_F - y_C) = 46,52 \text{ кН}\end{aligned}$$

і силу що врівноважує:

$$Q_2 = -(R_{76y} + R_{36y})\sin 30^\circ - (R_{76x} + R_{36x})\cos 30^\circ = -40 \text{ кН}.$$

З рівнянь рівноваги ланок 6 і 4:

$$\begin{aligned}\sum F_{x6} &= R_{76x} + R_{56x} + R_{36x} = 0, & \sum F_{x4} &= R_{04x} - Q_2 \cos 30^\circ = 0, \\ \sum F_{y6} &= R_{76y} + R_{56y} + R_{36y} = 0, & \sum F_{y4} &= R_{04y} - Q_2 \sin 30^\circ = 0\end{aligned}$$

знайдемо:

$$\begin{aligned}R_{56x} &= -20\sqrt{3} \text{ кН}; & R_{56y} &= -20 \text{ кН}; & R_{56} &= 40 \text{ кН}; \\ R_{04x} &= -20\sqrt{3} \text{ кН}; & R_{04y} &= -20 \text{ кН}; & R_{04} &= 40 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для визначення зусиль в першій структурній групі умовно роз'єднаємо шарнір В. Складемо три рівняння рівноваги відкритої кінематичної ланки (ланки 3,2,1):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= R_{83y}(x_H - x_A) - R_{83x}(y_H - y_A) + R_{63y}(x_E - x_A) - \\ &- R_{63x}(y_E - y_A) - R_{03y}(x_A - x_B) - R_{03x}(y_B - y_A) = 0, \\ (\sum F)_{OA} &= R_{03x} + R_{63x} + R_{83x} + Q_1 = 0, \\ \sum M_O &= R_{83y}(x_H - x_O) - R_{83x}(y_H - y_O) + R_{03y}(x_E - x_O) - \\ &- R_{63x}(y_E - y_O) + R_{03y}(x_B - x_O) - R_{03x}(y_B - y_O) = 0.\end{aligned}$$

З першого і третього рівнянь визначимо компоненти реакції в шарнірі В:

$$\begin{aligned}R_{03x} &= \frac{F_{x1}(x_B - x_O) - F_{y1}(x_B - x_A)}{(y_A - y_B)(x_B - x_O) - (y_O - y_B)(x_B - x_A)} = -15,672 \text{ кН}, \\ R_{03y} &= \frac{F_{y1}(y_A - y_B) - F_{x1}(y_O - y_B)}{(y_A - y_B)(x_B - x_O) - (y_O - y_B)(x_B - x_A)} = 40 \text{ кН}, & R_{03} &= 42,961 \text{ кН},\end{aligned}$$

де

$$F_{x1} = R_{83y}(x_A - x_H) + R_{83x}(y_H - y_A) + R_{63y}(x_A - x_E) + R_{63x}(y_E - y_A) = 18,807 \text{ кН},$$

$$F_{y1} = R_{83y}(x_O - x_H) + R_{83x}(y_H - y_O) + R_{63y}(x_O - x_E) + R_{63x}(y_E - y_O) = 74,232 \text{ кН}.$$

З другого рівняння знайдемо силу що врівноважує:

$$Q_1 = -R_{03x} - R_{63x} - R_{83x} = 50,313 \text{ кН}.$$

З умов рівноваги окремих ланок визначимо:

$$R_{23x} = R_{01x} = Q_1 = 50,313 \text{ кН}; \quad R_{23y} = R_{01y} = 0 \text{ кН}.$$

#### 4. Метод визначення сил, оснований на принципі можливих переміщень

Умови рівноваги механізму (механічної системи з ідеальними зв'язками) можуть бути отримані за допомогою принципу можливих переміщень, відповідно до якого сумарна робота всіх активних сил на будь-якому можливому переміщенні повинна дорівнювати нулю.

При дослідженні умов рівноваги доводиться розв'язувати два види завдань: а) при заданих силах визначати положення рівноваги; б) при заданому положенні рівноваги визначатимуть активні сили, прикладені до ланок механізму

Приклад 5. Визначимо момент що врівноважує в важільному механізмі, показаному на рис. 2,а.

Задамо вхідній координаті  $q$  мале переміщення  $\delta q$ ; при цьому вихідна ланка отримає переміщення  $\delta \varphi_7$ , величина якого, з точністю до цілих другого порядку,  $\delta \varphi_7 = (d\varphi_7 / dq)\delta q$ .

Привіримо до нуля можливу роботу робочого моменту і моменту  $Q$ :  $\delta A = Q\delta q - M \cdot \delta \varphi_7 = 0$ .

Тоді отримаємо:

$$Q = Md\varphi_7 / dq = M\varphi_7' = M \cdot J_Q / J = 21,053 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

де якобіан системи групових рівнянь (1):

$$J = \begin{vmatrix} -l_{AB} \sin \varphi_2 & l_{BI} \sin \varphi_3 & l_{HI} \sin \varphi_4 & 0 & 0 & 0 \\ l_{AB} \cos \varphi_2 & -l_{BI} \cos \varphi_3 & -l_{HI} \cos \varphi_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_{CI} \sin \varphi_3 & -l_{HI} \sin \varphi_4 & -l_{CF} \sin \varphi_5 & 0 & l_{GF} \sin \varphi_7 \\ 0 & l_{CI} \cos \varphi_3 & l_{HI} \cos \varphi_4 & l_{CF} \cos \varphi_5 & 0 & -l_{GF} \cos \varphi_7 \\ 0 & -l_{CI} \sin \varphi_3 & -l_{HI} \sin \varphi_4 & l_{DC} \sin \varphi_5 & l_{ED} \sin \varphi_6 & 0 \\ 0 & l_{CI} \cos \varphi_3 & l_{HI} \cos \varphi_4 & -l_{DC} \cos \varphi_5 & -l_{ED} \cos \varphi_6 & 0 \end{vmatrix} = -482,605 \text{ м}^6, \quad (7)$$

де  $J_Q$  – визначник, отриманий при заміні шостого стовпця в визначнику  $J$  на стовпець  $(l_{OA} \sin q, -l_{OA} \cos q, 0, 0, 0, 0)^T$ .

Принцип можливих переміщень застосовується також для визначення реакцій звільняючих зв'язків. Для цього механізм послідовно звільняється від одного з зв'язків. При цьому на одиницю збільшується його кількість ступенів вільності. В результаті з'являється нове можливе переміщення, яке раніше не допускалося цим зв'язком. Дія зв'язку замінюється відповідною реакцією, яку включають до складу активних сил. Далі підраховується робота всіх діючих активних сил на новому можливому переміщенні системи. Привіривши до нуля можливу роботу цих сил, отримуємо рівняння для визначення шуканої реакції.

Вказаний метод визначення сил (активних або реакцій зв'язків) має важливу перевагу перед іншими методами: кожна з невідомих сил визначається незалежно від інших розв'язанням одного рівняння.

Також є можливість застосувати погруповий метод визначення сил, який зводиться до складаються рівняння рівноваги зовнішніх сил для всіх структурних груп механізму в напрямку,

протилежному геометричному і кінематичному розрахунками, і рівняння рівноваги моментів і моментів сил, що діють на кожну ланку групи.

#### Висновки

Розглянуті тут методи визначення сил та моментів призначені для дослідження геометричних умов передачі сил. Є можливість відзначити, що вказане дослідження не замінює кінестатичного аналізу механізмів, який проводиться зазвичай на наступних етапах його проектування.

#### Список використаної літератури

1. Теория механизмов и машин / Коловский М.З., Евграфов А.Н., Семенов Ю.А., Слоущ А.В. – М.:Академия, 2006. – 560 с.
2. Теория механизмов и механика машин: Учебник для втузов/ К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов, и др.; Под ред. К.В. Фролова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 664 с.
3. Семенов Ю.А., Семенова Н.С. Теория механизмов и машин. Статика механизмов.: Учеб. пособие. – СПб: Изд-во СПбГТУ, 1999. – 44 с.
4. Пейсах Э.Е., Нестеров В.А. Система проектирования плоских рычажных механизмов. – М.: Машиностроение, 1988. – 232 с.
5. Озол О.Г. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
6. Артоболевский И.И. Теория механизмов: Учеб. для втузов. – М.: Наука, 1965.-776 с.

#### References

1. Theory of mechanisms and machines / Kolovsky M.Z., Evgrafov A.N., Semenov Yu.A., Slushush A.V. - M.: Academy, 2006. - 560 p.
2. Theory of mechanisms and mechanics of machines: Textbook for technical colleges / K.V. Frolov, S.A. Popov, A.K. Musatov, and others; Ed. K.V. Frolova. - M.: Publishing House of MSTU. N.E. Bauman, 2002. - 664 p.
3. Semenov Yu.A., Semenova N.S. Theory of mechanisms and machines. Statics of mechanisms.: Textbook. allowance. - St. Petersburg: Publishing House of St. Petersburg State Technical University, 1999. - 44 p.
4. Peysakh E.E., Nesterov V.A. System design flat lever mechanisms. - M.: Mechanical Engineering, 1988. - 232p.
5. Ozol O.G. Theory of mechanisms and machines. - M.: Science, 1984. - 432 s.
6. Artobolevsky I.I. Theory of mechanisms: Textbook. for technical colleges. - M. : Nauka, 1965.-776 p.