ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

УДК 512.64

М.І. КУЧМА
Національний університет “Львівська політехніка”

ЗВ’ЯЗОК МІЖ ФАКТОРИЗАЦІЯМИ СИНГУЛЯРНИХ І РЕГУЛЯРНИХ СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ ПОЛІНОМІВ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

Встановлено необхідні і достатні умови існування факторизацій $A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\nabla}$ *сингулярних симетричних матриць* $A(x)$ *із сингулярним множником* $B(x)$ *заданої форми Сміта і заданою системою нескінченних елементарних дільників над кільцем поліномів з інволюцією. Ці умови отримано з врахуванням обмежень на степені співмножників як недопустимої, так і допустимої факторизацій. Для кожного фіксованого розкладу форми Сміта симетричної матриці показано, що допустима факторизація єдина. Описано вигляд симетричної матриці* $C(x)$ *у формулі факторизації при кожній із можливих інволюцій у кільці поліномів.*

Знайдено необхідні і достатні умови існування факторизацій симетричних оборотних матриць над кільцем поліномів з інволюцією. Ці умови отримано з врахуванням обмежень на степені співмножників факторизації з використанням зворотного матричного полінома, і без обмежень на степені співмножників за допомогою узагальненого зворотного матричного полінома.

Досліджено зв’язок між факторизаціями сингулярних і регулярних симетричних матриць із сингулярним та регулярним множниками заданої форми Сміта і заданою системою нескінченних елементарних дільників над кільцем поліномів з інволюцією. Цей зв’язок побудовано в термінах нескінченних елементарних дільників, зворотного та узагальненого зворотного матричних поліномів, і реалізовано через алгоритм факторизацій відповідних регулярних симетричних матриць із регулярним множником заданої форми Сміта.

Наведено приклади факторизацій сингулярних симетричних матриць і факторизацій симетричних оборотних матриць над кільцем поліномів з інволюцією.

Ключові слова: симетричний матричний поліном, сингулярний і регулярний (унітальний) матричні поліноми, форма Сміта, нескінченні елементарні дільники, зворотний і узагальнений зворотний матричні поліноми, допустима факторизація, недопустима факторизація.

М.И. КУЧМА
Национальный университет “Львовская политехника”

СВЯЗЬ МЕЖДУ ФАКТОРИЗАЦИЯМИ СИНГУЛЯРНЫХ И РЕГУЛЯРНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ НАД КОЛЬЦАМИ ПОЛИНОМОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Установлены необходимые и достаточные условия существования факторизаций $A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\nabla}$ *сингулярных симметрических матриц* $A(x)$ *с сингулярным множителем* $B(x)$ *заданной формы Смита и заданной системой бесконечных элементарных делителей над кольцом полиномов с инволюцией. Эти условия получены с учетом ограничений на степени сомножителей как недопустимой, так и допустимой факторизаций. Для каждого фиксированного разложения формы Смита симметрической матрицы показано, что допустимая факторизация единственная. Описан вид симметрической матрицы* $C(x)$ *в формуле факторизации при каждой из возможных инволюций в кольце полиномов.*

Найдены необходимые и достаточные условия существования факторизаций симметрических обратимых матриц над кольцом полиномов с инволюцией. Эти условия получены с учетом ограничений на степени сомножителей факторизации с использованием обратимого матричного полинома, и без ограничений на степени сомножителей с помощью обобщенного обратимого матричного полинома.

Исследована связь между факторизациями сингулярных и регулярных симметрических матриц с сингулярным и регулярным множителями заданной формы Смита и заданной системой бесконечных элементарных делителей над кольцом полиномов с инволюцией. Эта связь представлена в терминах бесконечных элементарных делителей, обратимого и обобщенного обратимого матричных полиномов и реализована через алгоритм факторизаций соответствующих регулярных симметрических матриц с регулярным множителем заданной формы Смита.

Приведены примеры факторизаций сингулярных симметрических матриц и факторизаций симметрических обратимых матриц над кольцом полиномов с инволюцией.

Ключевые слова: симметрический матричный полином, сингулярный и регулярный (унитальный) матричные полиномы, форма Смита, бесконечные элементарные делители, обратимый и обобщенный обратимый матричные полиномы, допустимая факторизация, недопустимая факторизация.

M.I. KUCHMA
Lviv Polytechnic National University

THE CONNECTION BETWEEN FACTORIZATIONS OF SINGULAR AND REGULAR SYMMETRIC MATRICES OVER THE RINGS OF POLYNOMIALS WITH INVOLUTION

The necessary and sufficient conditions for the existence of factorizations $A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\nabla}$ of singular symmetric matrices $A(x)$ with a singular factor $B(x)$ of a given Smith form and a given system of infinite elementary divisors over a ring of polynomials with involution are established. These conditions are obtained taking into account the constraints on the degrees of factors of inadmissible and admissible factorizations. For each fixed Smith form of a symmetric matrix it is shown that the admissible factorization is unique. The form of the symmetric matrix $C(x)$ in the factorization formula for each of the possible involutions in the ring of polynomials is described.

The necessary and sufficient conditions for the existence of factorizations of symmetric invertible matrices over the ring of polynomials with involution are found. These conditions are obtained taking into account the constraints on the degree of factors of factorization using the dual matrix polynomial, and without limitation on the degree of factors by means of a generalized dual matrix polynomial.

The connection between factorizations of singular and regular symmetric matrices with singular and regular factors of a given Smith form and the given system of infinite elementary divisors over the ring of polynomials with involution is investigated. This connection is constructed in terms of infinite elementary dividers, dual and generalized dual matrix polynomials, and is implemented through the algorithm of factorizations of the corresponding regular symmetric matrices with a regular multiplier of a given Smith form.

Examples of factorizations of singular symmetric matrices and factorizations of symmetric invertible matrices over the ring of polynomials with involution are given.

Keywords: symmetric matrix polynomial, singular and regular (unital) matrix polynomials, Smith form, infinite elementary divisors, dual and generalized dual matrix polynomials, admissible factorization, inadmissible factorization.

Постановка проблеми

Факторизації симетричних матриць над кільцями поліномів з інволюцією досить широко застосовують в теорії диференціальних рівнянь, нелінійній теорії регулювання та диференціальних іграх, і таким чином, вони мають велике прикладне значення.

Нехай у кільце поліномів $K = \mathbf{C}[x]$ введено інволюцію ∇ одним із таких можливих способів [9]:

$$(\alpha) \qquad \left(\sum_{i=0}^{p} a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=0}^{p} \overline{a}_i (-x)^i,$$

$$(\beta) \qquad \left(\sum_{i=0}^{p} a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=0}^{p} a_i (-x)^i,$$

$$(\gamma) \qquad \left(\sum_{i=0}^{p} a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i.$$

На кільце матриць $M_n(K)$ інволюцію ∇ перенесено так:

$$A(x)^{\nabla} = \left\| a_{ij}(x) \right\|^{\nabla} = \left\| a_{ji}(x)^{\nabla} \right\|.$$

Матрицю $A(x)$ називатимемо симетричною, якщо $A(x) = A(x)^{\nabla}$.

У пропонованій роботі розглянуто факторизації симетричної матриці $A(x)$ з кільця $M_n(K)$ вигляду

$$A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\nabla}, \tag{1}$$

де $B(x) -$ регулярний або сингулярний матричний поліном, $C(x) = C(x)^{\nabla} -$ деяка неособлива матриця, які у випадку $C(x) = C$ охоплюють факторизації із робіт [9, 10].

Нагадаємо, що матрицю $A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^{m-i}$, де $A_i \in M_n(\mathbf{C})$, називають регулярною (сингулярною), якщо $A(x) -$ неособлива поліномна матриця, у якій $\det A_0 \neq 0$ ($\det A_0 = 0$).

У роботі [3] знайдено необхідні і достатні умови існування факторизацій регулярних симетричних матриць над кільцем поліномів з інволюцією та побудовано алгоритм матричної факторизації із регулярним (унітальним) множником заданої форми Сміта, а в [4, 5] отримано необхідні і достатні умови виділення спеціальних дільників із сингулярних матричних поліномів.

У пропонованій роботі подальші дослідження приводять до необхідності факторизацій сингулярних симетричних поліномів із сингулярним множником заданої форми Сміта, а також до факторизацій (1) оборотних симетричних матриць над кільцем поліномів з інволюцією. Алгебричний підхід до розв'язання цих задач та встановлення зв'язку між матричними факторизаціями сингулярних і регулярних поліномів здійснено з використанням понять зворотного і узагальненого зворотного матричного поліномів та системи нескінченних елементарних дільників [6, 12].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Більшість задач теорії абсолютної стійкості, теорії оптимального керування та теорії диференціальних ігор зводяться до необхідності матричної факторизації (1) без додаткових обмежень на степені поліномів у працях [9, 10]. У роботі [2] до факторизації симетричного матричного квадратного тричлена зводиться розв'язання задачі Ейлера-Арнольда про рух багатовимірного твердого тіла і більярдів в областях просторів постійної кривизни. Вирішення задачі $\mathbf{H}^{\infty}$ - оптимального керування спектральним методом [1] зводиться до розв'язання поліномного рівняння Ріккатті, розв'язок якого пов'язаний з існуванням канонічної факторизації матричного полінома з обмеженням на степені співмножників [14]. Запропонований у роботі [11] алгоритм послідовного скорочення множників для звичайної спектральної факторизації поліномів з виродженою матрицею старших коефіцієнтів, а потім для знакозмінних матричних поліномів [14], вимагають алгебричного підходу до розв'язання задач матричної факторизації із регулярним чи сингулярним множником заданої форми Сміта.

Формулювання мети дослідження

Метою даної роботи є дослідження зв'язку між факторизаціями регулярних і сингулярних симетричних матриць над кільцями поліномів з інволюцією. Для шуканого зв'язку використовуються конструкція понять зворотного і узагальненого зворотного матричного поліномів та нескінченних елементарних дільників.

Викладення основного матеріалу дослідження

Матрицю $\widetilde{A}(x)$ називатимемо зворотною до матриці $A(x)$, якщо $\widetilde{A}(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$. Розглянемо факторизації сингулярної симетричної матриці $A(x)$, характеристичний поліном $\det A(x)$ якої має усі корені відмінні від нуля, оскільки за необхідності цього завжди можна досягнути заміною змінної $x = t - \beta$, де $\beta -$ довільне число, відмінне від скінченної кількості коренів полінома $\det A(x)$.

Позначимо через $S_{\widetilde{A}}(x)$ форму Сміта матриці $\widetilde{A}(x)$

$$S_{\widetilde{A}}(x) = P(x)\widetilde{A}(x)Q(x), \tag{2}$$

де $P(x), Q(x) -$ деякі оборотні над K матриці.

У роботі [5] досліджувалось питання про виділення спеціальних дільників із сингулярного матричного полінома. Відомо, що необхідною і достатньою умовою для того, щоб $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x) -$ сингулярний матричний поліном степеня r з формою Сміта $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ і системою нескінченних елементарних дільників $x^{l_1}, x^{l_2}, \ldots, x^{l_n}$, $0 \le l_1 \le \ldots \le l_n$, $\sum_{i=1}^{n} l_i = rn - \sum_{i=1}^{n} \deg \varphi_i(x)$, причому $\deg A(x) = \deg B(x) + \deg C(x)$, є умова

$$\det M_{V(\overset{\infty}{\Phi})P(x)\|E,\, Ex, \ldots, Ex^{r-1}\|}(\overset{\infty}{\Phi}) \neq 0, \tag{3}$$

де $\overset{\infty}{\Phi}(x) = \mathrm{diag}\,(x^{l_1}\tilde{\varphi}_1(x), \ldots, x^{l_n}\tilde{\varphi}_n(x))$, $P(x) -$ довільна оборотна матриця із співвідношення (2), $V(\overset{\infty}{\Phi}) -$ ядро визначальної матриці $W(\overset{\infty}{\Phi})$, введеної в [8].

Умова (3) є необхідною умовою факторизації (1), але не достатньою. Наступний результат встановлює необхідні і достатні умови факторизації із сингулярним множником.

Теорема 1. Нехай $\Phi(x) = \mathrm{diag}\,(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ – d- матриця [7], яка є дільником форми Сміта $S_A(x)$ сингулярного матричного полінома $A(x)$. Для матриці $A(x) = A(x)^{\nabla}$ існує факторизація (1), в якій $B(x) -$ сингулярний матричний поліном степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$ і системою нескінченних елементарних дільників $x^{l_1}, x^{l_2}, \ldots, x^{l_n}$, $0 \le l_1 \le \ldots \le l_n$, $\sum_{i=1}^{n} l_i = rn - \sum_{i=1}^{n} \deg \varphi_i(x)$, а $C(x) = C(x)^{\nabla} -$ деяка неособлива матриця, причому $\deg A(x) = 2\deg B(x) + \deg C(x)$, тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця

$$V(\overset{\infty}{\Phi})P(x)\tilde{A}(x)P(x)^{\nabla}V(\overset{\infty}{\Phi})^{\nabla} \tag{4}$$

ділиться одночасно зліва на $\overset{\infty}{\Phi}(x)$ і справа на $\overset{\infty}{\Phi}(x)^{\nabla}$ при деяких допустимих значеннях параметрів матриці $V(\overset{\infty}{\Phi})$, для яких виконується умова (3), де $\overset{\infty}{\Phi}(x) = \mathrm{diag}\,(x^{l_1}\tilde{\varphi}_1(x), \ldots, x^{l_n}\tilde{\varphi}_n(x))$, $P(x) -$ довільна оборотна матриця із співвідношення (2), $V(\overset{\infty}{\Phi}) -$ ядро визначальної матриці $W(\overset{\infty}{\Phi})$.

Доведення. Необхідність. Нехай для сингулярної матриці $A(x)$ існує факторизація (1), причому $\deg A(x) = 2\deg B(x) + \deg C(x)$.

Розглянемо $\tilde{A}(x)$ зворотний поліном до $A(x)$. Тоді з рівності (1), за умови на степені співмножників, одержимо факторизацію регулярної симетричної матриці $\tilde{A}(x)$, у якій множник $\tilde{B}(x)$, зворотний до $B(x)$, є регулярною матрицею степеня r з формою Сміта $\overset{\infty}{\Phi}(x)$. Тому згідно з наведеним вище результатом про виділення сингулярного множника і теоремою 1 роботи [3] виконуються умови (3) і (4).

Достатність. При виконанні умов (3) і (4) існує факторизація симетричного полінома $\tilde{A}(x)$, зворотного до $A(x)$, у якій множник $\tilde{B}(x)$ є регулярним степеня r з формою Сміта $\overset{\infty}{\Phi}(x)$. Тоді, розглянувши зворотний до $\tilde{A}(x)$ матричний поліном, отримуємо факторизацію (1) матриці $A(x)$ із сингулярним множником $B(x)$, зворотним до $\tilde{B}(x)$, де $\deg B(x) = r$, $S_B(x) = \Phi(x)$ і системою нескінченних елементарних дільників $x^{l_1}, x^{l_2}, \ldots, x^{l_n}$.

Теорему доведено.

Припустимо, що форму Сміта матриці $A(x)$ можна зобразити у вигляді

$$S_A(x) = \Phi(x)I(x)\Phi(x)^{\nabla}, \tag{5}$$

де $\Phi(x), I(x) -$ d- матриці.

Зазначимо, що розклад симетричної матриці $A(x)$, в якому $B(x) -$ регулярний або сингулярний матричний поліном із формою Сміта $\Phi(x)$, а матриця $C(x)$ має форму Сміта $I(x)$, називають допустимою факторизацією матриці $A(x)$, паралельною факторизації (5) її форми Сміта $S_A(x)$. Інакше кажучи, факторизація (1) допустима тоді, коли форма Сміта матричного полінома $A(x)$ дорівнює добутку форм Сміта його співмножників. У протилежному разі, факторизацію (1) матриці $A(x)$ називають недопустимою.

Теорема 2. Для сингулярної симетричної матриці $A(x)$ існує допустима факторизація (1), в якій $B(x) -$ сингулярний матричний поліном степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$ і системою нескінченних елементарних дільників $x^{l_1}, x^{l_2}, \ldots, x^{l_n}$, $0 \le l_1 \le \ldots \le l_n$, $\sum_{i=1}^{n} l_i = rn - \sum_{i=1}^{n} \deg \varphi_i(x)$, а $C(x) = C(x)^{\nabla} -$ деяка неособлива матриця з формою Сміта $I(x)$, причому $\deg A(x) = 2\deg B(x) + \deg C(x),$ тоді і тільки тоді, коли

$$\det M_{P(x)\| E,\ Ex, \ldots, Ex^{r-1} \|}(\overset{\infty}{\Phi}) \neq 0,$$

де $\overset{\infty}{\Phi}(x) = \operatorname{diag}\,(x^{l_1}\tilde{\varphi}_1(x), \ldots, x^{l_n}\tilde{\varphi}_n(x))$, $P(x) -$ довільна оборотна матриця із співвідношення (2). Для кожного фіксованого розкладу (5) така допустима факторизація (1) єдина.

Доведення. Випливає з теореми 1 і наслідку з теореми 1 роботи [3].

Наслідок 1. Факторизація (1) сингулярного симетричного полінома $A(x)$, в якій $\deg A(x) = 2\deg B(x) + \deg C(x),$ існує тоді і тільки тоді, коли існує факторизація зворотного до $A(x)$ матричного полінома $\tilde{A}(x)$:

$$\tilde{A}(x) = \tilde{B}(x) C_1(x) \tilde{B}(x)^{\nabla}, \tag{6}$$

де $C_1(x) = \pm\tilde{C}(x).$

Опишемо вигляд симетричної матриці $C(x)$ у формулі факторизації (1) при кожній із можливих інволюцій у кільці K, введених у роботі [9].

Твердження 1. Нехай має місце факторизація (6) матричного полінома $\tilde{A}(x)$ зворотного до $A(x)$. Тоді матриця $C(x)$ у факторизації (1) має вигляд:

$C(x) = -\tilde{C}_1(x)$ за інволюцій (α), (β), якщо r – непарне число;

$C(x) = \tilde{C}_1(x)$ за інволюцій (α), (β), якщо r – парне число, і за інволюції (γ).

Приклад 1. Нехай сингулярна симетрична матриця $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ -x & 1-2x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x^2 \end{pmatrix}$, де $S_A(x) = \operatorname{diag}\,(1, 1-x^2, 1-x^2).$ Розглянемо $\tilde{A}(x) = \begin{pmatrix} x^2 & x & 0 \\ -x & x^2-2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-1 \end{pmatrix}$ зворотний до $A(x)$, де $S_{\tilde{A}}(x) = \operatorname{diag}\,(1,\ x^2-1,\ x^2(x^2-1)).$

Для регулярної симетричної матриці $\tilde{A}(x)$ існують факторизації

$$\tilde{A}(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x & -1 & 0 \\ 0 & -x-1 & 0 \\ 0 & 0 & -x-1 \end{pmatrix}$$

з регулярним множником $\tilde{B}_1(x)$ форма Сміта якого $\overset{\infty}{\Phi}_1(x) = \mathrm{diag}\ (1,\ x-1,\ x(x-1))$, і

$$\tilde{A}(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x & -1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

з регулярним множником $\tilde{B}_2(x)$ форма Сміта якого $\overset{\infty}{\Phi}_2(x) = \mathrm{diag}\ (1, 1,\ x(x^2-1))$.

Тоді для сингулярного матричного полінома $A(x)$ матимемо такі факторизації

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & -x+1 & 0 \\ 0 & 0 & -x+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{pmatrix},$$

у якій $B_1(x)$ – сингулярний множник з формою Сміта $\Phi_1(x) = \mathrm{diag}\ (1, 1-x, 1-x)$ і системою нескінченних елементарних дільників $1, 1, x$, і

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & -x & 1 \end{pmatrix},$$

у якій $B_2(x)$ – сингулярний множник з формою Сміта $\Phi_2(x) = \mathrm{diag}\ (1, 1, 1-x^2)$ і системою нескінченних елементарних дільників $1, 1, x$. Перший розклад матриці $A(x)$ є прикладом допустимої факторизації, паралельною факторизації (5) її форми Сміта $S_A(x)$, а другий $A(x)$ – недопустимої факторизації.

Зауважимо, що факторизації (1) сингулярних симетричних матричних поліномів отримують з відповідних факторизацій зворотних матричних поліномів, які є регулярними. Алгоритм здійснення факторизацій регулярних симетричних матриць із регулярним множником заданої форми Сміта над кільцем поліномів з інволюцією описано у роботі [3].

Розглянемо факторизації сингулярної симетричної матриці $A(x)$, характеристичний поліном $\det A(x)$ яких є одиницею кільця $K = \mathbf{C}[x]$. Такі оборотні над K матриці $A(x)$ є сингулярними [13]. Легко бачити, що $\tilde{A}(x)$ зворотна до матриці $A(x) \in GL_n(K)$ є регулярною матрицею, характеристичний поліном якої $\det \tilde{A}(x) = x^{mn}$.

Наступний результат встановлює необхідні і достатні умови факторизації симетричної оборотної над K матриці $A(x)$, в якій $B(x) \in GL_n(K)$, $\deg B(x) = m/2$.

Теорема 3. Для симетричної оборотної над K матриці $A(x)$ існує факторизація (1), в якій $B(x)$ оборотна над K із системою нескінченних елементарних дільників $x^{l_1}, x^{l_2}, \ldots, x^{l_n}$, $0 \le l_1 \le \ldots \le l_n$, $\sum_{i=1}^{n} l_i = mn/2$, а $C(x) = C$ – неособлива діагональна матриця, тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця $V(\overset{\infty}{\Phi})P(x)\tilde{A}(x)P(x)^{\nabla}V(\overset{\infty}{\Phi})^{\nabla}$ ділиться одночасно зліва на $\overset{\infty}{\Phi}(x)$ і справа на $\overset{\infty}{\Phi}(x)^{\nabla}$ при деяких допустимих значеннях параметрів матриці $V(\overset{\infty}{\Phi})$, для яких виконується умова (3), де

$\overset{\infty}{\Phi}(x) = diag\,(x^{l_1},...,x^{l_n})$, $P(x)-$ довільна оборотна матриця із співвідношення (2), $V(\overset{\infty}{\Phi})-$ ядро визначальної матриці $W(\overset{\infty}{\Phi})$.

Доведення. Необхідність випливає із теореми 1 і наслідку 1.

Достатність. Згідно з теоремами 1 робіт [3] існує факторизація регулярного матричного полінома $\widetilde{A}(x)$ зворотного до $A(x)$

$$\widetilde{A}(x) = \widetilde{B}_1(x)G\widetilde{B}_1(x)^{\nabla}, \tag{7}$$

де $\widetilde{B}_1(x)-$ унітальна матриця степеня $m/2$ з формою Сміта $\overset{\infty}{\Phi}(x)$, а $G = G^{\nabla}-$ неособлива матриця. Матриця G є ермітово конгруентною за інволюції (α) (конгруентною за інволюцій (β), (γ)) до матриці енерції $I(G) = \mathrm{diag}\,\{E_k, E_{n-k}\}$, де $k-$ кількість додатних власних значень матриці G, тобто $G = TI(G)T^{\nabla}$, а $T \in GL_n(\mathbf{C})$.

Тоді із співвідношення (7) одержуємо факторизацію

$$\widetilde{A}(x) = \widetilde{B}(x)C_1\widetilde{B}(x)^{\nabla}, \tag{8}$$

де $\widetilde{B}(x) = \widetilde{B}_1(x)T-$ регулярна матриця степеня $m/2$ з формою Сміта $\overset{\infty}{\Phi}(x)$, $C_1 = I(G)$.

Розглянувши поліном зворотний до $\widetilde{A}(x)$, з рівності (8) одержимо факторизацію (1), у якій матриця $B(x)$ зворотна до $\widetilde{B}(x)$ є оборотною над K із системою нескінченних елементарних дільників $x^{l_1}, x^{l_2},..., x^{l_n}$, а вигляд матриці $C = \pm C_1$ описано у твердженні 1.

Теорему доведено.

З теореми 3 випливає наслідок.

Наслідок 2. Для симетричної матриці $A(x) \in GL_n(K)$ існує факторизація (1), в якій $B(x) \in GL_n(K)$, $\deg B(x) = \deg A(x)/2$, тоді і тільки тоді, коли існує факторизація симетричної матриці $\widetilde{A}(x)$ зворотної до $A(x)$.

Важливою є задача про факторизацію (1) оборотної над K симетричної матриці $A(x)$ степеня m, в якій $B(x) \in GL_n(K)$, $\deg B(x) > m/2$. У таких факторизаціях умова на степені поліномів не виконується, тобто $\deg A(x) \neq \deg B(x) + \deg B(x)^{\nabla}$, тому скористаємось введеним у [6] поняттям узагальненого зворотного полінома.

Нехай $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}$ – деякий поліном, зокрема матричний. Узагальненим зворотним до $f(x)$ відносно r степеня називатимемо поліном $\widetilde{\widetilde{f}}(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{i+r}$, де $r \in \mathbf{N}$.

Якщо $\deg f(x) = m$, то очевидно, що $\widetilde{\widetilde{f}}(x) = x^{r+m} f\left(\frac{1}{x}\right)$, $r \in \mathbf{N}$.

Легко бачити, що якщо матричний поліном $A(x)$ оборотний над K, то $\widetilde{\widetilde{A}}(x)$ – узагальнений зворотний до $A(x)$ є регулярним матричним поліномом. Якщо $A(x)$ симетрична матриця, то матриця $\widetilde{\widetilde{A}}(x)$ симетрична, коли $r-$ парне число. Надалі, вважатимемо, що $r-$ парне число.

Зважаючи, що $\widetilde{\widetilde{A}}(x) = Ex^r\widetilde{A}(x)$, $r \in \mathbf{N}$, то легко переконатись у справедливості наступного твердження.

Твердження 2. Нехай форма Сміта $S_{\tilde{A}}(x)$ матричного полінома $\tilde{A}(x)$ зворотного до $A(x)$ має вигляд (2). Тоді форма Сміта $S_{\tilde{\tilde{A}}}(x)$ матричного полінома $\tilde{\tilde{A}}(x)$ отримується за тих самих матриць $P(x),\ Q(x)$ оборотних над K, тобто $S_{\tilde{\tilde{A}}}(x) = P(x)\tilde{\tilde{A}}(x)Q(x)$.

Теорема 4. Для симетричної матриці $A(x) \in GL_n(K)$ існує факторизація (1), в якій $B(x) \in GL_n(K)$, $C = C^{\nabla}$ – неособлива діагональна матриця, тоді і тільки тоді, коли існує недопустима факторизація [3] матричного полінома $\tilde{\tilde{A}}(x)$ узагальненого зворотного до $A(x)$ відносно r степеня, де $r = \deg\, \tilde{B}(x) + \deg\, \tilde{B}(x)^{\nabla} - m$, $\tilde{B}(x)$ зворотний до $B(x)$ поліном.

Доведення. Необхідність. Нехай для матриці $A(x) \in GL_n(K)$ існує факторизація (1) і

$$r = \deg\, \tilde{B}(x) + \deg\, \tilde{B}(x)^{\nabla} - \deg\, A(x).$$

Розглянувши $\tilde{\tilde{A}}(x)$ узагальнений зворотний до $A(x)$ відносно r степеня, із рівності (1) одержуємо факторизацію регулярного матричного полінома $\tilde{\tilde{A}}(x)$.

Доведемо, що отримана факторизація матриці $\tilde{\tilde{A}}(x)$ не може бути допустимою. Припустимо, що існує допустима факторизація для $\tilde{\tilde{A}}(x)$

$$\tilde{\tilde{A}}(x) = \tilde{B}_1(x) C_1 \tilde{B}_1(x)^{\nabla}$$

І

$$S_{\tilde{\tilde{A}}}(x) = \Phi_1(x) I\, \Phi_1(x)^{\nabla}, \quad \deg\, \Phi_1(x) = n(m+r)/2,$$

де поліном $\tilde{B}_1(x)$ з формою Сміта $\Phi_1(x)$. Оскільки $S_{\tilde{\tilde{A}}}(x) = Ex^r S_{\tilde{A}}(x)$, то з останніх співвідношень можна виділити лівий і правий множники $Ex^{r/2}$ і $(Ex^{r/2})^{\nabla}$ відповідно

$$\tilde{B}_1(x) = Ex^{r/2}\tilde{B}(x), \qquad \Phi_1(x) = Ex^{r/2}\Phi(x).$$

Звідси випливає, що існує допустима факторизація матриці $\tilde{A}(x)$, в якій матриця $\tilde{B}(x)$ степеня $m/2$ з формою Сміта $\Phi(x)$. Отримали протиріччя, оскільки $\deg\, \tilde{B}(x) = \deg\, B(x) > m/2.$

Достатність. Нехай існує факторизація матричного полінома $\tilde{\tilde{A}}(x)$ узагальненого зворотного до $A(x)$ відносно r степеня

$$\tilde{\tilde{A}}(x) = \tilde{B}(x) C_1 \tilde{B}(x)^{\nabla}, \tag{9}$$

причому $\deg\, \tilde{\tilde{A}}(x) = \deg\, \tilde{B}(x) + \deg\, \tilde{B}(x)^{\nabla}$.

Розглянувши матричний поліном зворотний до $\tilde{\tilde{A}}(x)$, з рівності (9) одержуємо факторизацію оборотної над K матриці $A(x)$, причому

$$\deg\, A(x) < \deg\, B(x) + \deg\, B(x)^{\nabla}.$$

Остання нерівність має місце, оскільки матричні коефіцієнти при $x^{r-1},\dots,x^0$ полінома $\tilde{\tilde{A}}(x)$ є нульовими.

Теорему доведено.

Приклад 2. Нехай матриця $A(x)=\begin{pmatrix} x^2-1 & x^2 \\ x^2 & x^2+1 \end{pmatrix}\in GL_n(K)$.

Розглянемо $\tilde{A}(x)=\begin{pmatrix} 1-x^2 & 1 \\ 1 & 1+x^2 \end{pmatrix}$ зворотний до $A(x)$, де $S_{\tilde{A}}(x)=\operatorname{diag}(1,-x^4)$. Переконавшись, що для матриці $\tilde{A}(x)$ не існує допустимої факторизації, у якій множник $\tilde{B}(x)$ з формою Сміта $\operatorname{diag}(1,x^2)$. Розглянемо $\tilde{\tilde{A}}(x)=\begin{pmatrix} x^2-x^4 & x^2 \\ x^2 & x^2+x^4 \end{pmatrix}$ узагальнений зворотний до $A(x)$ відносно 2-го степеня, де $S_{\tilde{\tilde{A}}}(x)=\operatorname{diag}(x^2,-x^6)$.

Згідно з теоремою 4 для регулярного матричного полінома $\tilde{\tilde{A}}(x)$ не існує допустимої факторизації, у якій множник $\tilde{B}(x)$ з формою Сміта $\operatorname{diag}(x,x^3)$. Для матриці $\tilde{\tilde{A}}(x)$ існує недопустима факторизація

$$\tilde{\tilde{A}}(x)=\begin{pmatrix} x^2-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & x^2+\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x^2+\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

у якій множник $\tilde{B}(x)$ має форму Сміта $\operatorname{diag}(1,x^4)$. Використавши зворотний до $\tilde{\tilde{A}}(x)$, з формули факторизації $\tilde{\tilde{A}}(x)$ одержимо шукану факторизацію оборотної над K матриці

$$A(x)=\begin{pmatrix} 1-\frac{x^2}{2} & \frac{x^2}{2} \\ -\frac{x^2}{2} & 1+\frac{x^2}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\frac{x^2}{2} & -\frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} & 1+\frac{x^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Висновки

У термінах системи нескінченних елементарних дільників і поняття зворотного матричного полінома знайдено необхідні і достатні умови існування факторизацій сингулярних симетричних матриць із сингулярним множником заданої форми Сміта над кільцями поліномів з інволюцією.

За допомогою понять зворотного й узагальненого зворотного матричних поліномів, отримано необхідні й достатні умови факторизації оборотних симетричних матриць над кільцем поліномів з інволюцією. Факторизації таких матриць отримано з обмеженням на степені співмножників і без додаткових обмежень. Встановлено зв'язок між факторизаціями сингулярних і регулярних симетричних матриць над кільцями поліномів з інволюцією. Цей зв'язок побудовано з використанням понять зворотного і узагальненого зворотного матричних поліномів та системи нескінченних елементарних дільників і наведено приклади вказаних вище факторизацій.

Список використаної літератури

1. Балабанов А. Е. Факторизация матричных полиномов с ограничением на степени // Автоматика и телемеханика, 1997. № 5. С. 86–100.
2. Веселов А. П. Интегруемые лагранжевы соответствия и факторизация матричных многочленов // Функ. анализ и его прилож., 1991. № 25. Вып. 2. С. 38–49.
3. Зеліско В.Р., Кучма М.І. Факторизація симетричних матриць над кільцем многочленів з інволюцією // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. Т. 40. № 4. С. 91–95.
4. Зеліско В.Р., Кучма М.І. Факторизації сингулярних симетричних матриць над кільцем многочленів з інволюцією // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2000. Т. 43. № 2. С. 23–27.

5. Кучма М.І. Про спеціальні дільники сингулярних матричних многочленів // Мат. студії. 1997. Т. 8**.** № 2. С. 153–156.
6. Кучма М.І. Симетрична еквівалентність матричних многочленів і виділення спільного унітального дільника із матричних многочленів. // Укр. матем. журн. – 2001. Т. 53. № 2. – С. 211-219.
7. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники – Київ: Наук. думка, 1981. 224 с.
8. Казимирский П.С., Щедрик В.П. О решениях матричных многочленных односторонних уравнений // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304. № 2. С. 271–274.
9. Любачевский Б.Д. Факторизация симметрических матриц с элементами из кольца с инволюцией. I // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 2. С. 337–356.
10. Якубович В.А. Факторизация симметрических матричных многочленов // Докл. АН СССР. – 1970. Т. 194. № 3. С. 532–535.
11. Callier F. On polynomial matrix spectral factorization by symmetric extraction // IEEE Trans. Automat. Control. 1985. V.AC-30. № 2. P. 453-464.
12. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrix Polynomials. Academic Press, New York-London 1982.
13. Kuchma M.I. Factorizations of Invertible Symmetric Matrices over Polynomial Rings with Involution// Global Journal of Pure and Applied Mathematics. 2017. V. 13, № 10. p. 7073-7080.
14. Kwakernaak H., Sebek M. Polynomial J–spectral factorization // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V.AC-39. № 2. P. 315-328.