ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ
ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 514.18

В.М. ВЕРЕЩАГА, К.Ю. ЛИСЕНКО
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

КОМПОЗИЦІЙНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ КРИВИМИ БАЛЮБИ ПРОСТОРОВОЇ ДИСКРЕТНО ПОДАНОЇ КРИВОЇ

Як правило, застосування високотехнологічного обладнання є ефективним, коли суб'єкти господарювання мають систему керування цим обладнанням. Функціонування такого обладнання визначається достатньо великою кількістю факторів технологічних процесів, які постійно змінюються і які необхідно враховувати щодня для прийняття управлінських рішень, застосовуючи, при цьому, комп'ютери поширеної комплектації. При цьому, особа, що приймає рішення не повинна мати спеціальної математичної підготовки. Математичні методи мають бути «чорною скринькою» і, у той же час, у системі керування технологічними процесами підмоделі мають бути побудованими на засадах одного способу. Створювана модель має бути розрахованою на щоденне використання з метою аналізу і розв'язання багатофакторних задач, які враховують сотні факторів і якісний аналіз яких підвищує ефективність функціонування об'єкту.

Створення методу моделювання, здатного враховувати вимоги, що наведені вгорі, є проблемою.Показано, що у традиційних методах інтерполяції просторових дискретно поданих кривих (ДПК) вихідні точки віднесено до обраної системи координат. В результаті чого, будь-яка поточна точка кривої, що інтерполює ДПК, також визначається у обраній вихідній системі координат.

У методі композиційної інтерполяції точки вихідної ДПК задані у довільно обраній системі координат. Однак, розв'язок, щодо знаходження поточної точки на інтерполяційній кривій Балюби (Б-кривій), подається відносно базисних точок вихідної ДПК.

Надано приклади уніфікації вихідної ДПК з використанням композиційних матриць точкових та параметричних.

Показано, що Б-крива подається у параметричній формі, параметрами якої єсть координати Балюби-Найдиша (БН-координати), що визначають на Б-кривій положення будь-якої поточної точки відносно базисних точок просторової ДПК.

Ключові слова: композиційна інтерполяція, просторова ДПК, Б-крива, БН-координати.

В.М. ВЕРЕЩАГА, К.Ю. ЛЫСЕНКО
Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого

КОМПОЗИЦИОННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КРИВЫМИ БАЛЮБЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСКРЕТНО ЗАДАННОЙ КРИВОЙ

Как правило, применение высокотехнологичного оборудования является эффективным, когда субъекты хозяйствования имеют систему управления этим оборудованием. Функционирование такого оборудования определяется достаточно большим количеством факторов технологических процессов, которые постоянно меняются и которые необходимо учитывать ежедневно для принятия управленческих решений, применяя при этом, компьютеры распространенной комплектации. При этом, лицо, принимающее решение не должна иметь специальной математической подготовки. Математические методы должны быть «черным ящиком» и, в то же время, в системе управления технологическими процессами подмодели должны быть построенными на основе одного способа. Создаваемая модель должна быть рассчитанной на ежедневное использование с целью анализа и решения многофакторных задач, которые учитывают сотни факторов и качественный анализ которых повышает эффективность функционирования объекта.

Создание метода моделирования, способного учитывать требования, приведенные вверху, является проблемою. Показано, что в традиционных методах интерполяции пространственных дискретно представленных кривых (ДПК) исходные точки отнесены к выбранной системы координат. В результате чего, любая текущая точка кривой, интерполирует ДПК, также определяется в выбранной исходной системе координат.

В методе композиционного интерполяции точки исходной ДПК заданные в произвольно *выбранной системе координат. Однако, решение, о нахождении текущей точки на интерполяционной кривой Балюба (Б кривой), подается относительно базисных точек исходной ДПК.*

Даны примеры унификации исходной ДПК с использованием композиционных матриц точечных и параметрических.

Показано, что Б кривая подается в параметрической форме, параметрами которой есть координаты Балюба-Найдиша (БН координаты), определяющие на Б-кривой положение любой текущей точки относительно базисных точек пространственной ДПК.

Ключевые слова: композиционная интерполяция, пространственная ДПК, Б-кривая, БН-координаты.

V. VERESCHAGA, K. LYSENKO
Melitopol State Pedagogical University named after Bogdan Khmelnytsky

COMPOSITIVE INTERPOLATION OF THE CURVE OF THE SPACE DISCRETE OF THE CURRENT CRUISES

Typically, the use of high-tech equipment is effective when businesses have a management system for this equipment. The operation of such equipment is determined by a sufficiently large number of factors of constantly changing technological processes, which must be taken into account daily for the adoption of managerial decisions, while using computers with a common set of equipment. In this case, the decision maker should not have special mathematical training. Mathematical methods should be a "black box" and, at the same time, in the control system of technological processes, submodels should be built on the principles of one method. The created model should be designed for daily use in order to analyze and solve multifactor problems, which take into account hundreds of factors and the qualitative analysis of which increases the efficiency of the operation of the object.

It is shown that in the traditional methods of interpolation of spatial discretely presented curves (DCC), the source points are assigned to the selected coordinate system. As a result, any current point of the curve interpolating the DCC is also determined in the selected initial coordinate system.

In the method of composite interpolation, the points of the source DCC are given in an arbitrarily chosen coordinate system. However, the solution to finding the current point on the interpolation curve of Baluba (B-curve) is given relative to the basic points of the initial DCC.

Examples of unification of output DCC using composite point and parametric matrices are given.

It is shown that B curve is presented in a parametric form, whose parameters are the coordinates of the Baluba-Naidysh (BN-coordinates), which determine the position of any current point on the B-curve relative to the basic points of the spatial DCC.

Keywords: composite interpolation, spatial DCC, B-curve, BN-coordinates.

Постановка проблеми

Наразі, у більшій мірі, є ефективними суб'єкти господарювання, що мають високотехнологічне обладнання на виробництвах. Як правило, ефективність функціонування такого обладнання визначається достатньо великою кількістю факторів технологічних процесів, які необхідно, в умовах системи керування виробництвом, враховувати, аналізувати, переналаштовувати, змінювати, замінювати, тощо. І все це треба виконувати в рамках робочого місця особи, що приймає рішення (ОПР) на комп'ютерах середньої потужності, які розповсюджені на виробництвах. При цьому, ОПР не повинна мати спеціальної математичної підготовки. Математичні методи побудови моделей для будь-якого рівня ієрархії структури мають бути віддаленими від ОПР і знаходитись в межах програмного забезпечення, до якого ОПР не повинна мати відношення. Окрім цього, математична модель будь-якого процесу мусить мати модульну структуру, а моделі кожного з модулів мають бути однаковими – однотипними, тобто побудованими на засадах одного математичного методу. Створювані системи керування об'єктами, мають бути розрахованими на щоденне розв'язання задач для прийняття керівництвом більш вмотивованих рішень з метою підвищення ефективності функціонування об'єкту. Створення методу моделювання, здатного розв'язати завдання, сформульовані вгорі, є проблемою, шляхи до вирішення якої будуть показати у цій статті.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Композиційна інтерполяція просторових ДПК базується на засадах точкового числення Балюби-Найдиша (БН-числення) з використанням БН-координат та метричного оператора трьох точок. Породжувачами точкового БН-числення є Балюба І.Г. та Найдиш В.М. [7, 8], яке ними почало розроблятися з 1985-90-го років минулого століття і наразі продовжує розвиватися їхніми учнями та послідовниками [6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16].

Точкове БН-числення – це геометрія відношень частки геометричної фігури (ГФ) до цілої ГФ, яке підкорюється властивостям простого відношення трьох точок прямої [17].

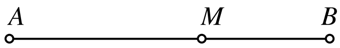

Рис. 1. Визначення БН-координат для прямої

Наприклад, (рис. 1) для прямої параметри p_A та p_B визначаються як відношення:

$$p_A = \frac{MB}{AB};\ p_B = \frac{AM}{AB}, \tag{1}$$

які являють собою БН-координати прямої *AB*, а її рівняння, у точковій формі, маємо записати наступним чином:

$$M = Ap_A + Bp_B, \tag{2}$$

де поточна точка *M*, положення якої на прямій *AB* визначається частками від одиниці – p_A та p_B. Параметри p_A та p_B нами названо [6, 11] координатами Балюби-Найдиша (БН-координатами), сума яких завжди має дорівнювати одиниці: $p_A + p_B = 1$. А точкове рівняння (2) є рівнянням Б-кривої, у якому поточна точка *M* визначена, за допомоги БН-координат, відносно базисних точок *A* та *B*.

Якщо обидві БН-координати є додатно орієнтованими, то поточна точка *M* знаходиться всередині відтинку (*AB*). Якщо p_A – від'ємно орієнтована, то поточна точка *M* – справа від точки *B* на прямій *AB*. У разі, коли БН-координата p_B – від'ємно орієнтована, то поточна точка *M* знаходиться зліва від точки *A*.

У цьому випадку точки *A* та *B* визначаються базисними, а положення поточної точки *M* на прямій *AB* визначається відносно базисних точок, а не відносно системи координат, в якій знаходиться пряма *AB*.

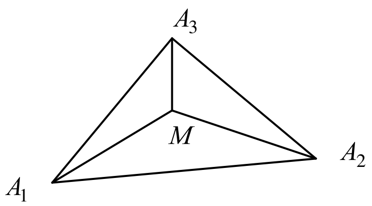

Рис. 2. Параметризація площини

Наведемо один з прикладів параметризації площини [6, 7, 8, 11] (рис. 2), у якому БН-координати визначаються як відношення площ:

$$p_1 = \frac{S_{MA_2A_3}}{S_{A_1A_2A_3}};\ p_2 = \frac{S_{A_1MA_3}}{S_{A_1A_2A_3}};\ p_1 = \frac{S_{A_1A_2M}}{S_{A_1A_2A_3}} \tag{3}$$

Тоді положення поточної точки відносно базисних точок A_1, A_2, A_3 визначатиметься за точковим рівнянням:

$$M = A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 \tag{4}$$

Точкові рівняння (2) та (4) є формалізованими, за їх схемою утворюються розрахункові координатні рівняння:

а) для прямої	б) для площини	
$x_M = x_A \cdot p_A + x_B \cdot p_B$	$x_M = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3$	
$y_M = y_A \cdot p_A + y_B \cdot p_B$	$y_M = y_1 \cdot p_1 + y_2 \cdot p_2 + y_3 \cdot p_3$	(5)
$z_M = z_A \cdot p_A + z_B \cdot p_B$	$z_M = z_1 \cdot p_1 + z_2 \cdot p_2 + z_3 \cdot p_3$	

В усіх наведених координатних рівняннях параметри – БН-координати є сталими через те, що вони за сутністю своєю є простим відношенням трьох точок, яке є інваріантом паралельного проектування.

У відповідності до [8] метричний оператор трьох точок (МОТТ) є число, яке обчислюється для трьох точок і однозначно відповідає взаємному розташуванню цих точок у геометричній фігурі (ГФ).

МОТТ у точковому БН-числення є аналогом скалярного добутку у векторному численні схему обчислення МОТТ надано на рис. 3.

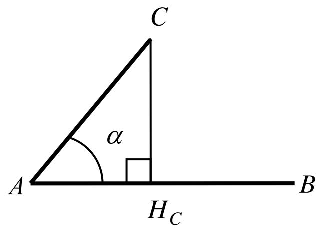

Рис. 3. Схема для обчислення МОТТ

Позначається МОТТ, для схеми на рис. 3, символом Σ^A_{BC} (читається: сигма *BC* з вершиною *A*).

$$\Sigma^A_{BC} = (BA)\cdot(CA)\cdot\cos\alpha = \Sigma(B-A)\cdot(C-A), \text{ де} \tag{6}$$

$(BA)\cdot(CA)\cdot\cos\alpha$ – геометрична форма подання МОТТ;

$\Sigma(B-A)\cdot(C-A)$ – точкова форма подання МОТТ.

Точкова форма подання МОТТ єсть формалізованим записом, який вказує на алгоритм виконання відповідних дій з координатами вказаних точок. Покажемо розкриття форми точкової у координатну:

$$\Sigma^A_{BC} = \Sigma(B-A)\cdot(C-A) = \sum_{i=1}^{n}(i_B - i_A)\cdot(i_C - i_A), \tag{7}$$

де i – номери координат, вказаних у індексах точок.

Якщо для обчислення скалярного добутку двох векторів використовуються координати їх початкової та кінцевої точок, то у МОТТ використовуються довжини відповідних відтинків безвідносно до вихідної системи координат.

Рис. 4. Особливий випадок МОТТ

У разі, коли точки B і C співпадають (рис. 4), то три точки утворюють подвійний відтинок $(AB)=(AC)$. Тоді маємо записати МОТТ:

$$\Sigma^A_{BB} = \Sigma(B-A)^2 = \sum_{i=1}^{n}(i_B - i_A)^2 \text{, або } \Sigma^A_{CC} = \Sigma(C-A)^2 = \sum_{i=1}^{n}(i_C - i_A)^2 \text{, де} \tag{8}$$

$i = \overline{1, n}$ – цілі число, що вказують на номер координат відповідних точок, вказаних у індексах.

МОТТ (8) визначають квадрат довжини відтинку $(AB):(AC)$ у n-мірному просторі. Тоді довжину цих відтинків дістанемо:

$$(AB) = \sqrt{\Sigma^A_{BB}}\ ;\ (AC) = \sqrt{\Sigma^A_{CC}} \tag{9}$$

Проведений аналіз досліджень, вказує на можливість застосування МОТТ для композиційної інтерполяції просторової ДПК.

Формулювання мети дослідження

Розробити метод композиційної інтерполяції для просторової ДПК з використанням МОТТ.

Викладення основного матеріалу дослідження

Нехай у довільній системі координат тривимірного простору E^3 обрано чотири *L*-значні (для $L=\overline{1,n}$) точки A_i для $i=\overline{1,4}$, що не належать одній площині, які визначають вихідну просторову ДПК (рис. 5). Необхідно побудувати просторову Б-криву, яка глобально композиційно інтерполювала б вихідні точки A_i для $i=\overline{1,4}$.

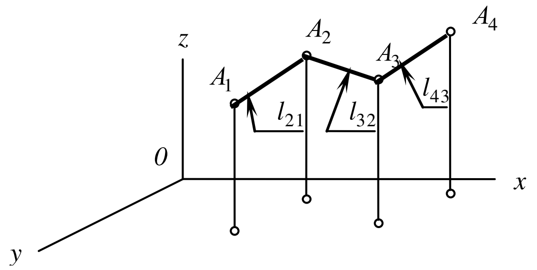

Рис. 5. Вихідна просторова ДПК

Побудуємо супровідну ламану лінію, що з’єднує вихідні точки A_i ($i=\overline{1,4}$). Одержимо відтинки l_{21}, l_{32}, l_{43}, довжини яких визначимо за (9):

$$l_{21}=\sqrt{\Sigma_{22}^{1}}\,;\; l_{32}=\sqrt{\Sigma_{33}^{2}}\,;\; l_{43}=\sqrt{\Sigma_{44}^{3}} \tag{10}$$

У виразах (10), для скорочення записів, вказано тільки індекси «*i*» відповідних точок A_i. Окрім (10), ще визначимо:

$$l_{31}=l_{21}+l_{32}=\sqrt{\Sigma_{22}^{1}}+\sqrt{\Sigma_{33}^{2}}\,;\; l_{41}=l_{31}+l_{43}=\sqrt{\Sigma_{22}^{1}}+\sqrt{\Sigma_{33}^{2}}+\sqrt{\Sigma_{44}^{3}} \tag{11}$$

Розрахуємо параметри t_i для точок A_i для $i=\overline{1,4}$:

$$\begin{gathered} t_1=\frac{\sqrt{\Sigma_{11}^{1}}}{\sqrt{\Sigma_{22}^{1}}+\sqrt{\Sigma_{33}^{2}}+\sqrt{\Sigma_{44}^{3}}}=0\,;\; t_2=\frac{\sqrt{\Sigma_{22}^{1}}}{\sqrt{\Sigma_{22}^{1}}+\sqrt{\Sigma_{33}^{2}}+\sqrt{\Sigma_{44}^{3}}}\,; \\ t_3=\frac{\sqrt{\Sigma_{22}^{1}}+\sqrt{\Sigma_{33}^{2}}}{\sqrt{\Sigma_{22}^{1}}+\sqrt{\Sigma_{33}^{2}}+\sqrt{\Sigma_{44}^{3}}}\,;\; t_4=\frac{\sqrt{\Sigma_{22}^{1}}+\sqrt{\Sigma_{33}^{2}}+\sqrt{\Sigma_{44}^{3}}}{\sqrt{\Sigma_{22}^{1}}+\sqrt{\Sigma_{33}^{2}}+\sqrt{\Sigma_{44}^{3}}}=1 \end{gathered} \tag{12}$$

Використовуючи (12) складемо характеристичні функції для усіх вихідних точок A_i:

$$\begin{gathered} A_1:\; P_1(t)=\lambda_{11}\cdot\lambda_{12}\cdot\lambda_{13}\cdot\lambda_{14}\cdot(t_2-t)(t_3-t)(t_4-t),\text{ де} \\ \lambda_{11}=\frac{1}{\lambda_{12}\cdot\lambda_{13}\cdot\lambda_{14}\cdot(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_4-t_1)}, \\ \lambda_{12},\; \lambda_{13},\; \lambda_{14} - \text{довільні дійсні числа;} \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} A_2:\; P_2(t)=\lambda_{22}\cdot\lambda_{21}\cdot\lambda_{23}\cdot\lambda_{24}\cdot(t_1-t)(t_3-t)(t_4-t),\text{ де} \\ \lambda_{22}=\frac{1}{\lambda_{21}\cdot\lambda_{23}\cdot\lambda_{24}\cdot(t_1-t_2)(t_3-t_2)(t_4-t_2)}, \\ \lambda_{21},\; \lambda_{23},\; \lambda_{24} - \text{довільні дійсні числа;} \end{gathered} \tag{14}$$

$$A_3:\; P_3(t)=\lambda_{33}\cdot\lambda_{31}\cdot\lambda_{32}\cdot\lambda_{34}\cdot(t_1-t)(t_2-t)(t_4-t),\text{ де} \tag{15}$$

$$\lambda_{33} = \frac{1}{\lambda_{31} \cdot \lambda_{32} \cdot \lambda_{34} \cdot (t_1 - t_3)(t_2 - t_3)(t_4 - t_3)},$$

λ_{31}, λ_{32}, λ_{34} – довільні дійсні числа;

$$A_4: \; P_4(t) = \lambda_{44} \cdot \lambda_{41} \cdot \lambda_{42} \cdot \lambda_{43} \cdot (t_1 - t)(t_2 - t)(t_3 - t), \text{ де}$$

$$\lambda_{44} = \frac{1}{\lambda_{41} \cdot \lambda_{42} \cdot \lambda_{43} \cdot (t_1 - t_4)(t_2 - t_4)(t_3 - t_4)}, \tag{16}$$

λ_{41}, λ_{42}, λ_{43} – довільні дійсні числа.

Знайдемо суму характеристичних функцій (13), (14), (15), (16), яку позначимо μ_4, де індекс «4» вказує на кількість точок, що композиційно інтерполює:

$$\mu_4 = \sum_{j=1}^{4} p_j(t) \tag{17}$$

Тоді БН-координати Б-кривої матимуть вигляд:

$$P_1 = \frac{P_1(t)}{\mu_4}; \; P_2 = \frac{P_2(t)}{\mu_4}; \; P_3 = \frac{P_3(t)}{\mu_4}; \; P_4 = \frac{P_4(t)}{\mu_4} \tag{18}$$

Враховуючи (18), точкове рівняння M_4 просторової Б-кривої, що композиційно інтерполює точки, матиме вигляд:

$$M_4 = \sum_{j=1}^{4} A_j \cdot p_j, \text{ де} \sum_{j=1}^{4} p_j = 1 \tag{19}$$

Посилаючись на роботи [1, 2, 3 4, 5, 7] вказуємо на те, що параметри p_i для $i = \overline{1,4}$ з (19) являють собою дробово-раціональні функції і у той же час вони є БН-координатами, які:

– встановлюють взаємне розташування вихідних точок A_i уніфікованої геометричної фігури [15];

– забезпечують проходження Б-кривої через базисні точки [6, 11];

– визначають положення поточної точки на Б-кривій відносно її базисних точок, а не відносно вихідної системи координат.

У роботах [6, 11] було доведено, що будь-яка поточна точка Б-кривої, формується як композиція часток базисних точок (рис. 6). Як бачимо на рис. 6 не зображено вихідну систему координат – у ній немає потреби, тому поточна точка *M* визначається відносно базисних точок *A*, для $j = \overline{1,4}$.

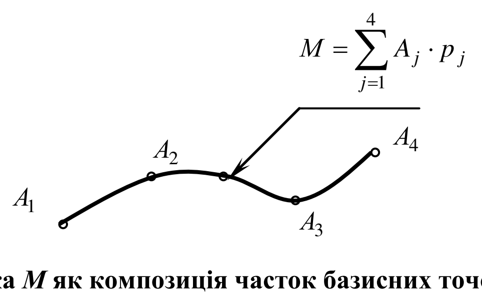

Рис. 6. Поточна точка *M* як композиція часток базисних точок A_1, A_2, A_3, A_4

Частку для кожної з базисних точок A_j, $j = \overline{1,4}$ визначає значення БН-координати для параметру *t*, що відповідає положенню поточної точки *M* на Б-кривій.

Рівняння (19) є формалізованим у точковій формі, його реалізація здійснюється через відповідні координатні рівняння:

$$M(1)=\sum_{j=1}^{4} A_j(1)\cdot p_j\ ;\ M(2)=\sum_{j=1}^{4} A_j(2)\cdot p_j\ ,\ \ldots,\ M(n)=\sum_{j=1}^{4} A_j(n)\cdot p_j\ , \tag{20}$$

де числа 1, 2, …, n в дужках визначають номер осі, на яку відбувається проектування просторового розв'язку.

Координатні рівняння (20) означають проекції Б-кривої і поточної точки на ній на кожну з n осей. Тобто $M(i)$, для $i=\overline{1,n}$ єсть значення координати на відповідні осі. У традиційній багатовимірній геометрії встановлюється проекційний зв'язок між проекціями, а у композиційній багатовимірній інтерполяції між проекціями існує параметричний зв'язок. Це надає переваги у тому, що можна діставати проекції розв'язку не тільки на площині, а і на багатовимірні простори нижчої вимірності.

Висновки

Запропонований метод композиційної просторової інтерполяції дозволить створювати однотипні алгоритми утворення Б-кривих, і у цілому, композиційних геометричних моделей.

Запропонована композиційна інтерполяція надає можливість змінювати розмірність E^n у процесі моделювання і експлуатації, що сприяє підвищенню оперативності у переналаштуванні програмної реалізації та більш якісної мотивації прийняття управлінських рішень.

Застосування метричних операторів трьох точок надав можливість скороченого та безпомилкового запису узагальнених точкових виразів.

Список використаної літератури

1. Адоньєв Є.О., Верещага В.М., Найдиш А.В. Застосування геометричних матриць для утворення точкових рівнянь Б-поверхонь / Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага, А.В. Найдиш // Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету. - Мелітополь: ТДАТУ, 2018. - Вип. 8, Т.1, с. 153-160.
2. Адоньєв Є.О., Верещага В.М. Концептуальні засади використання композиційного методу геометричного моделювання при формуванні оптимального портфелю проектів з енергозбереження в навчальних закладах. / Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017. – Вип. 9. – С. 3-10.
3. Адоньєв Є.О., Верещага В.М., Лисенко К.Ю. Встановлення взаємозв'язків між простими відношеннями трьох точок прямої та БН-координатами для геометричних фігур / Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага, К.Ю. Лисенко // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2018. – Вип. 11. – С. 3-7.
4. Адоньєв Є.О., Верещага В.М., Лисенко К.Ю. Розробка узагальненої техніки алгебраїчного формування Б-функцій для трьох точок – Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Х.: НТУ «ХПІ» - 2016 р. - №50 (1222)
5. Адоньєв Є.О., Верещага В.М., Лисенко К.Ю. Розробка узагальненої техніки алгебраїчного формування Б-функцій для чотирьох точок Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Х.: НТУ «ХПІ» - 2017р. - №16(1238).
6. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис..докт.техн.наук. – К.: КНУБА, 2018. – 512 с.
7. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис. … доктора тех. наук. - Макеевка: МИСИ, 1995.-227 с.
8. Балюба И.Г. Точечное исчисление [учебное пособие] / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш; под ред. Верещаги В.М. // Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б.Хмельницкого. – 2015. – 234 с.
9. Бездітний А.О. Варіативне дискретне геометричне моделювання на основі геометричних співвідношень у точковому численні Балюби-Найдиша: дис. ... канд. техн. наук. - Таврійський держ. агротехнол. ун-т. - Мелітополь, 2012.-155 с.
10. Верещага В.М. Композиційний метод утворення Б-поверхонь / В.М. Верещага, Є.О. Адоньєв // Науковий журнал «Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво». – Луцьк.: Луцький національний технічний університет – 2017, №26, С. 36-41.

11. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: Монографія / В.М. Верещага. – Мелітополь: ФОП Однорог Т.В. – 2017. – 108 с.
12. Давиденко І.П. Конструювання поверхонь просторових форм методом рухомого симплексу: автореф. дис... канд. техн. наук. - Мелітополь, 2012. - 23 с.
13. Конопацький Є.В. Геометричне моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша: автореф. дис. канд. техн. наук - М-во аграрної політики та продовольства України, Таврійський держ. агротехнологічний ун-т. - Мелітополь, 2012. - 26 с.
14. Кучеренко В.В. Формалізовані геометричні моделі нерегулярної поверхні для гіперкількісної дискретної скінченої множини точок: дис. ... канд. техн. наук - Дніпропетровськ, 2013. - 187 с.
15. Лисенко К.Ю. Особливості композиційного геометричного моделювання / К.Ю. Лисенко, А.В. Найдиш, І.Г. Балюба, В.М. Верещага // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2019. – Вип. 95. – с. 131-137.
16. Павленко О.М. Геометричне моделювання вертикального планування горизонтальної земельної ділянки засобами точкового БН-числення: автореф. дис…канд.. техн. наук, 05.01.01 – Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2017 – 23 с.
17. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия / Н.Ф. Четверухин // 7-е изд., М.: УЧПЕДГНЗ, 1961 – 360 с.