

УДК 629.765

<https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2020.1.1.2>

С.І. ВЛАДОВ

Кременчуцький льотний коледж
Харківського національного університету внутрішніх справ
ORCID: 0000-0001-8009-5254

Ю.М. ШМЕЛЬОВ

Кременчуцький льотний коледж
Харківського національного університету внутрішніх справ
ORCID: 0000-0002-3942-2003

Л.М. ПИЛИПЕНКО

Кременчуцький льотний коледж
Харківського національного університету внутрішніх справ
ORCID: 0000-0001-5221-0921

Н.В. ПОДГОРНИХ

Кременчуцький льотний коледж
Харківського національного університету внутрішніх справ
ORCID: 0000-0002-1503-6896

Н.П. НАЗАРЕНКО

Кременчуцький льотний коледж
Харківського національного університету внутрішніх справ
ORCID: 0000-0001-9745-2430

Н.В. ТУТОВА

Кременчуцький льотний коледж
Харківського національного університету внутрішніх справ
ORCID: 0000-0001-5609-5502

І.О. ДЕРЯБІНА

Кременчуцький льотний коледж
Харківського національного університету внутрішніх справ
ORCID: 0000-0001-5164-2976

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОБОЧИХ ПРОЦЕСІВ АВІАЦІЙНОГО ГАЗОТУРБІННОГО ДВИГУНА ТВ3-117 ДЛЯ КОНТРОЛЮ І ДІАГНОСТИКИ ЙОГО ТЕХНІЧНОГО СТАНУ

Предметом дослідження в статті є авіаційний двигун ТВ3-117 та методи контролю і діагностики його технічного стану. Мета роботи – математичне моделювання робочих процесів авіаційного двигуна ТВ3-117 для контролю і діагностики його технічного стану в польотних режимах. В статті вирішуються наступні завдання: отримання системи рівнянь, що описують робочі процеси авіаційного двигуна ТВ3-117; різницева апроксимація рівнянь, що описують робочі процеси авіаційного двигуна ТВ3-117; розробка алгоритму реалізації різницевої апроксимації рівнянь робочих процесів, що протікають в авіаційному двигуні ТВ3-117. Використовуються такі методи: методи математичного моделювання, метод різницевої апроксимації (перехід до безрозмірного вигляду рівнянь, різницева апроксимація, перехід до лінійної моделі в просторі і математичний опис відстані між двома сусідніми точками). Отримано наступні результати: Розроблений алгоритм реалізації різницевої апроксимації рівнянь робочих процесів, що протікають в авіаційному двигуні ТВ3-117, що дозволяє моделювати ситуації, які могли б статися під час експлуатації авіаційного двигуна ТВ3-117, що надає можливості проаналізувати вже минулі або передбачити розвиток майбутніх подій в тій чи іншій ситуації. Висновки: Розроблений алгоритм реалізації різницевої апроксимації рівнянь робочих процесів, що протікають в авіаційному двигуні ТВ3-117, можливо використовувати для динамічного відображення стану авіаційного двигуна в режимі реального часу, тобто застосувати його для створення програмного комплексу, який здійснює моніторинг динамічних (перехідних) процесів в авіаційному двигуні ТВ3-117. Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному: вперше розроблено метод контролю і діагностики інформаційних показників технічного стану авіаційного двигуна ТВ3-117, який базується на різницевої апроксимації рівнянь, що описують робочі процеси, що протікають в авіаційному двигуні ТВ3-117, що дозволить здійснювати контроль і діагностику термогазодинамічних показників в режимі реального часу.

Ключові слова: авіаційний двигун, контроль, діагностика, рівняння Нав'є-Стокса, апроксимація.

- С.И. ВЛАДОВ
Кременчугский летный колледж
Харьковского национального университета внутренних дел
ORCID: 0000-0001-8009-5254
- Ю.Н. ШМЕЛЕВ
Кременчугский летный колледж
Харьковского национального университета внутренних дел
ORCID: 0000-0002-3942-2003
- Л.Н. ПИЛИПЕНКО
Кременчугский летный колледж
Харьковского национального университета внутренних дел
ORCID: 0000-0001-5221-0921
- Н.В. ПОДГОРНИХ
Кременчугский летный колледж
Харьковского национального университета внутренних дел
ORCID: 0000-0002-1503-6896
- Н.П. НАЗАРЕНКО
Кременчугский летный колледж
Харьковского национального университета внутренних дел
ORCID: 0000-0001-9745-2430
- Н.В. ТУТОВА
Кременчугский летный колледж
Харьковского национального университета внутренних дел
ORCID: 0000-0001-5609-5502
- И.А. ДЕРЯБИНА
Кременчугский летный колледж
Харьковского национального университета внутренних дел
ORCID: 0000-0001-5164-2976

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОЧИХ ПРОЦЕССОВ АВИАЦИОННОГО ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ ТВ3-117 ДЛЯ КОНТРОЛЯ И ДИАГНОСТИКИ ЕГО ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

Предметом исследования в статье является авиационный двигатель ТВ3-117 и методы контроля и диагностики его технического состояния. Цель работы – математическое моделирование рабочих процессов авиационного двигателя ТВ3-117 для контроля и диагностики его технического состояния в полетных режимах. В статье решаются следующие задачи: получение системы уравнений, описывающих рабочие процессы авиационного двигателя ТВ3-117; разностная аппроксимация уравнений, описывающих рабочие процессы авиационного двигателя ТВ3-117; разработка алгоритма реализации разностной аппроксимации уравнений рабочих процессов, протекающих в авиационном двигателе ТВ3-117. Используются следующие методы: методы математического моделирования, метод разностной аппроксимации (переход к безразмерному виду уравнений, разностная аппроксимация, переход к линейной модели в пространстве и математическое описание расстояния между двумя соседними точками). Получены следующие результаты: Разработан алгоритм реализации разностной аппроксимации уравнений рабочих процессов, протекающих в авиационном двигателе ТВ3-117, который позволяет моделировать ситуации, которые могли бы произойти при эксплуатации авиационного двигателя ТВ3-117, что дает возможность проанализировать уже прошедшие или предсказать развитие будущих событий в той или иной ситуации. Выводы: Разработанный алгоритм реализации разностной аппроксимации уравнений рабочих процессов, протекающих в авиационном двигателе ТВ3-117, возможно использовать для динамического отображения состояния авиационного двигателя в режиме реального времени, то есть применить его для создания программного комплекса, который осуществляет мониторинг динамических (переходных) процессов в авиационном двигателе ТВ3-117. Научная новизна полученных результатов заключается в следующем: впервые разработан метод контроля и диагностики информационных показателей технического состояния авиационного двигателя ТВ3-117, основанный на разностной аппроксимации уравнений, описывающих рабочие процессы, протекающие в авиационном двигателе ТВ3-117, что позволит осуществлять контроль и диагностику термодинамических показателей в режиме реального времени.

Ключевые слова: авиационный двигатель, контроль, диагностика, уравнения Навье-Стокса, аппроксимация.

S.I. VLADOV

Kremenchuk Flight College of
Kharkiv National University of Internal Affairs
ORCID: 0000-0001-8009-5254

Y.M. SHMELOV

Kremenchuk Flight College of
Kharkiv National University of Internal Affairs
ORCID: 0000-0002-3942-2003

L.M. PYLYPENKO

Kremenchuk Flight College of
Kharkiv National University of Internal Affairs
ORCID: 0000-0001-5221-0921

N.V. PODHORNYKH

Kremenchuk Flight College of
Kharkiv National University of Internal Affairs
ORCID: 0000-0002-1503-6896

N.P. NAZARENKO

Kremenchuk Flight College of
Kharkiv National University of Internal Affairs
ORCID: 0000-0001-9745-2430

N.V. TUTOVA

Kremenchuk Flight College of
Kharkiv National University of Internal Affairs
ORCID: 0000-0001-5609-5502

I.O. DIERIABINA

Kremenchuk Flight College of
Kharkiv National University of Internal Affairs
ORCID: 0000-0001-5164-2976

MATHEMATICAL MODELING OF WORKING PROCESSES OF THE TV3-117 AIRCRAFT GAS-TURBINE ENGINE FOR CONTROL AND DIAGNOSTICS OF ITS TECHNICAL STATE

The subject matter of the article is TV3-117 aircraft engine and methods for monitoring and diagnosing its technical condition. The goal of the work is mathematical modeling of the working processes of the TV3-117 aircraft engine for control and diagnostics of its technical state in flight modes. The following tasks were solved in the article: getting the system of equations describing the workflows of the aircraft engine TV3-117; differential approximation of equations describing the workflows of the aircraft engine TV3-117; development of algorithm for implementation of differential approximation of the equations of work processes occurring in the aircraft engine TV3-117. The following methods used are – mathematical modeling methods, difference approximation method (transition to dimensionless form of equations, difference approximation, transition to linear model in space and mathematical description of the distance between two adjacent points). The following results were obtained – An algorithm for the implementation of the difference approximation of the equations of workflows occurring in TV3-117 aircraft engine has been developed, which allows to simulate situations that could occur during the operation of TV3-117 aircraft engine, which provides an opportunity to analyze the past or predict the development of future events in that or other situation. Conclusions: The algorithm for implementing the differential approximation of the equations of workflows flowing in TV3-117 aircraft engine, can be used to dynamically display the state of the aircraft engine in real time, that is, to apply it to create a software complex that monitors the dynamic (transient) processes in TV3-117 aircraft engine. The scientific novelty of the obtained results is the following: for the first time the method of control and diagnostics of information indicators of TB3-117 aircraft engine technical state was developed, based on the differential approximation of equations describing the workflows occurring in TB3-117 aircraft engine, which will allow to control and real-time diagnostics of thermodynamic parameters.

Keywords: aircraft engine, control, diagnostics, Navier-Stokes equation, approximation.

Постановка проблеми

Авіаційний газотурбінний двигун ТВ3-117 являє собою складну динамічну систему із взаємопов'язаним впливом газодинамічних і теплофізичних процесів, що протікають в його вузлах [1–3]. Функціонування двигуна відбувається під впливом внутрішніх і зовнішніх збурень. Розробка методу контролю і діагностики технічного стану авіаційного двигуна ТВ3-117 на основі математичного моделювання термогазодинамічних процесів і реалізація його в бортовій системі є одним із завдань загальної проблеми комп'ютерної підтримки і автоматизації етапів проектування і доведення, забезпечення надійної і стійкої роботи двигунів в експлуатації. Математична модель, даючи можливість більш обґрунтовано аналізувати умови роботи двигуна в системі силової установки літального апарату,

підвищує інформативність теоретичних і експериментальних досліджень, науково-методичного супроводу натурних випробувань і налагодження [1–3]. Ускладнення завдань управління, використання досконаліших і складних алгоритмів управління, розвиток електронних технологій [4–6] створили передумови широкого впровадження методів математичного моделювання для задач оптимального управління двигуном [7].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Задача контролю і діагностики технічного стану авіаційних двигунів – у наш час є дуже поширеною, в якій варто виділити розробку інтелектуальних методів, зокрема застосування FDI-методу, експертних систем, нейронних мереж тощо [1–3, 5, 6]. У роботах професора Жернакова С.В., які присвячені інтелектуальним методам контролю і діагностики технічного стану авіаційних двигунів відзначено, що діагностика проточної частини авіаційного двигуна ТВ3-117 проводиться по відхиленням контрольованих термогазодинамічних параметрів на різних режимах роботи [5, 6]. Але в зазначених вище роботи в області контролю і діагностики технічного стану авіаційних двигунів питання математичного моделювання робочих процесів, що протікають в авіаційних двигунах, або взагалі не проводилось, або проводилось у незначній мірі.

Для розробки бортового обладнання сучасних повітряних суден (у тому числі та вертольоти) необхідні принципові нові технічні рішення. Такі розробки неможливі без проведення широкомасштабних експериментаторів на базі виробничої техніки, технологій та технологій математичних моделей фізичних процесів авіаційного обладнання, в тому числі, й авіаційних двигунів. Таким чином, поставлена у роботі задача математичного моделювання робочих процесів авіаційного двигуна ТВ3-117 для контролю і діагностики його технічного стану в польотних режимах є актуальною.

Формулювання мети дослідження

Відомо, що газодинамічні процеси авіаційного двигуна ТВ3-117 описуються за допомогою циклу Брайтона, який складається з чотирьох процесів (рис. 1): ізоентропічне стиснення (процес 1-2), ізобаричне підведення теплоти (процес 2-3), ізоентропічне розширення (процес 3-4), ізобаричне відведення теплоти (процес 4-1).

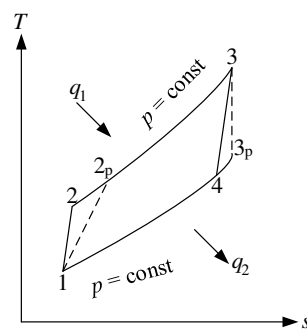


Рис. 1. Узагальнена схема реального циклу Брайтона на T - s діаграмі: точки 2 і 4 – для ідеального циклу; точки 2_p і 4_p – для реального циклу; точки 1 і 3 – для ідеального і реального циклів

Робоче тіло (повітря) надходить в двигун з атмосфери через вхідний пристрій. Ізоентропічне стиснення повітря 1-2 відбувається у вхідному пристрої і в компресорі. В авіаційному двигуні ТВ3-117 зі зростанням швидкості польоту підвищення тиску у вхідному пристрої практично не відбувається, а головне стиснення повітря відбувається у компресорі. У камері згоряння при постійному тиску відбувається згоряння палива (процес 2-3) і до повітря підводиться теплота q_1 . Відпрацьовані гази (газ) надходять до газової турбіни, яка служить для приводу компресора. При ізоентропічному розширенні газу (процес 3-4) відбувається процес зниження тиску продуктів згоряння в турбіні практично до атмосферного, і через вихідний пристрій вони відводяться до атмосфери. При розширенні в турбіні значна частина енергії газу перетворюється в роботу на валу турбіни, яка передається через редуктор на повітряний гвинт. Ізобаричне відведення теплоти 4-1 відповідає охолодженню в навколишній атмосфері гарячих продуктів згоряння, що впливають із вихідного пристрою двигуна, з відведенням теплоти q_2 [8].

Таким чином, інформативними каналами буде стан термодинамічної системи в точках 1, 2_p , 3 і 4_p . Отже, поставлена задача зводиться до отримання аналітичних виразів, що описують стан термодинамічної системи в даних точках.

Метою роботи є математичне моделювання робочих процесів авіаційного двигуна ТВ3-117 для контролю і діагностики його технічного стану в польотних режимах.

Викладення основного матеріалу дослідження

Передбачається, що в процесі роботи авіаційного двигуна ТВ3-117, виконуються фундаментальні закони збереження енергії, маси, імпульсу тощо. Тоді рівняння Нав'є-Стокса, що описує рух стиснутого теплопровідного газу, буде мати вигляд [9–11]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x_3} = 0; \quad (1)$$

де $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{U}, U_{x_1}, U_{x_2}, U_{x_3})$;

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_{x_1} \\ \rho u_{x_2} \\ \rho u_{x_3} \\ E \end{pmatrix}; \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \rho u_{x_1} \\ \rho u_{x_1}^2 + p - \Pi_{x_1 x_1} \\ \rho u_{x_1} u_{x_2} - \Pi_{x_1 x_2} \\ \rho u_{x_1} u_{x_3} - \Pi_{x_1 x_3} \\ (E + p)u_{x_1} - q_{x_1} \end{pmatrix}; \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \rho u_{x_2} \\ \rho u_{x_1} u_{x_2} - \Pi_{x_1 x_2} \\ \rho u_{x_2}^2 + p - \Pi_{x_2 x_2} \\ \rho u_{x_2} u_{x_3} - \Pi_{x_2 x_3} \\ (E + p)u_{x_2} - q_{x_2} \end{pmatrix}; \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} \rho u_{x_3} \\ \rho u_{x_1} u_{x_3} - \Pi_{x_1 x_3} \\ \rho u_{x_2} u_{x_3} - \Pi_{x_2 x_3} \\ \rho u_{x_3}^2 + p - \Pi_{x_3 x_3} \\ (E + p)u_{x_3} - q_{x_3} \end{pmatrix};$$

де ρ – густина; $\mathbf{u} = (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})$ – вектор швидкості; p – тиск; $E = \rho \varepsilon + \rho \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}{2}$ – повна енергія одиниці об'єму; ε – внутрішня енергія одиниці маси.

Компоненти тензора в'язких напружень виражаються у вигляді лінійної комбінації похідних від компонент вектору швидкості:

$$\Pi_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u}; \quad (2)$$

де $\lambda = \mu' - \frac{2}{3}\mu$; μ і μ' – коефіцієнти першої й другій в'язкості відповідно.

У рівнянні збереження енергії члени q_i мають вигляд:

$$q_i = \sum_{i=1}^3 \Pi_{ij} u_j + k \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad (3)$$

де T – температура; k – коефіцієнт теплопровідності.

У загальному випадку $\mu = \mu(\rho, T)$; $k = k(T)$.

Система (1) виражає закон збереження маси (перше рівняння системи), імпульсу (2–4 рівняння) і енергії (останнє рівняння системи).

Однак, в узагальненому вигляді рівняння Нав'є-Стокса не має кінцевого розв'язку. У даний час розв'язки рівняння Нав'є-Стокса можливо лише отримати за певними початковими і граничними умовами, які конкретизують його застосування при описі того чи іншого динамічного процесу.

Запишемо систему рівнянь (1) в декартових координатах для тривимірного випадку, зручного для чисельної реалізації, у вигляді:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (j_{mx_1})}{\partial x_1} + \frac{\partial (j_{mx_2})}{\partial x_2} + \frac{\partial (j_{mx_3})}{\partial x_3} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial (\rho u_{x_1})}{\partial t} + \frac{\partial (j_{mx_1} u_{x_1})}{\partial x_1} + \frac{\partial (j_{mx_2} u_{x_1})}{\partial x_2} + \frac{\partial (j_{mx_3} u_{x_1})}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial \Pi_{x_1 x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_{x_2 x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Pi_{x_3 x_1}}{\partial x_3}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial (\rho u_{x_2})}{\partial t} + \frac{\partial (j_{mx_1} u_{x_2})}{\partial x_1} + \frac{\partial (j_{mx_2} u_{x_2})}{\partial x_2} + \frac{\partial (j_{mx_3} u_{x_2})}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial \Pi_{x_1 x_2}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_{x_2 x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Pi_{x_3 x_2}}{\partial x_3}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial (\rho u_{x_3})}{\partial t} + \frac{\partial (j_{mx_1} u_{x_3})}{\partial x_1} + \frac{\partial (j_{mx_2} u_{x_3})}{\partial x_2} + \frac{\partial (j_{mx_3} u_{x_3})}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial \Pi_{x_1 x_3}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_{x_2 x_3}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Pi_{x_3 x_3}}{\partial x_3}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial (j_{mx_1} H)}{\partial x_1} + \frac{\partial (j_{mx_2} H)}{\partial x_2} + \frac{\partial (j_{mx_3} H)}{\partial x_3} + \frac{\partial q_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial q_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial q_{x_3}}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\Pi_{x_1 x_1} u_{x_1} + \Pi_{x_1 x_2} u_{x_2} + \Pi_{x_1 x_3} u_{x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\Pi_{x_2 x_1} u_{x_1} + \Pi_{x_2 x_2} u_{x_2} + \Pi_{x_2 x_3} u_{x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\Pi_{x_3 x_1} u_{x_1} + \Pi_{x_3 x_2} u_{x_2} + \Pi_{x_3 x_3} u_{x_3}); \quad (8)$$

де E – повна енергія одиниці об'єму; H – повна питома ентальпія, які описуються виразами:

$$E = \rho \frac{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}; H = \frac{E + p}{\rho}; p = \rho RT.$$

Компоненти вектору густини потоку маси \mathbf{j}_m можна описати наступними виразами:

$$j_{mx_1} = \rho(u_{x_1} - \omega_{x_1}); j_{mx_2} = \rho(u_{x_2} - \omega_{x_2}); j_{mx_3} = \rho(u_{x_3} - \omega_{x_3});$$

де

$$\omega_{x_1} = \frac{\tau}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho u_{x_1}^2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{x_1} u_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{x_1} u_{x_3}}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_1} \right); \omega_{x_2} = \frac{\tau}{\rho} \left(\frac{\partial u_{x_1} u_{x_2}}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_{x_2}^2)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{x_2} u_{x_3}}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_2} \right);$$

$$\omega_{x_3} = \frac{\tau}{\rho} \left(\frac{\partial u_{x_1} u_{x_3}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{x_2} u_{x_3}}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_{x_3}^2)}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_3} \right).$$

Компоненти тензора в'язких напружень Π визначаються за допомогою виразів:

$$\Pi_{x_1 x_1} = \Pi_{x_1 x_1}^{NS} + u_{x_1} \omega_{x_1}^* + R^*; \Pi_{x_1 x_2} = \Pi_{x_1 x_2}^{NS} + u_{x_1} \omega_{x_2}^*; \Pi_{x_1 x_3} = \Pi_{x_1 x_3}^{NS} + u_{x_1} \omega_{x_3}^*; \Pi_{x_2 x_1} = \Pi_{x_2 x_1}^{NS} + u_{x_2} \omega_{x_1}^*; \Pi_{x_2 x_2} = \Pi_{x_2 x_2}^{NS} + u_{x_2} \omega_{x_2}^* + R^*; \Pi_{x_2 x_3} = \Pi_{x_2 x_3}^{NS} + u_{x_2} \omega_{x_3}^*; \Pi_{x_3 x_1} = \Pi_{x_3 x_1}^{NS} + u_{x_3} \omega_{x_1}^*; \Pi_{x_3 x_2} = \Pi_{x_3 x_2}^{NS} + u_{x_3} \omega_{x_2}^*; \Pi_{x_3 x_3} = \Pi_{x_3 x_3}^{NS} + u_{x_3} \omega_{x_3}^* + R^*;$$

де $\Pi_{x_1 x_1}^{NS}, \Pi_{x_1 x_2}^{NS}, \Pi_{x_1 x_3}^{NS}, \Pi_{x_2 x_1}^{NS}, \Pi_{x_2 x_2}^{NS}, \Pi_{x_2 x_3}^{NS}, \Pi_{x_3 x_1}^{NS}, \Pi_{x_3 x_2}^{NS}, \Pi_{x_3 x_3}^{NS}$ – компоненти нав'є-стоксового тензора в'язких напружень, які визначаються із виразів:

$$\Pi_{x_1 x_1}^{NS} = 2\eta \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1} - \frac{2}{3} \eta \operatorname{div} \mathbf{u}; \Pi_{x_1 x_2}^{NS} = \Pi_{x_2 x_1}^{NS} = \eta \left(\frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_2} \right); \Pi_{x_1 x_3}^{NS} = \Pi_{x_3 x_1}^{NS} = \eta \left(\frac{\partial u_{x_3}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_3} \right);$$

$$\Pi_{x_2 x_2}^{NS} = 2\eta \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_2} - \frac{2}{3} \eta \operatorname{div} \mathbf{u}; \Pi_{x_2 x_3}^{NS} = \Pi_{x_3 x_2}^{NS} = \eta \left(\frac{\partial u_{x_3}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_3} \right); \Pi_{x_3 x_3}^{NS} = 2\eta \frac{\partial u_{x_3}}{\partial x_3} - \frac{2}{3} \eta \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Величини $\omega_{x_1}^*, \omega_{x_2}^*, \omega_{x_3}^*, R^*$ визначаються за формулами:

$$\omega_{x_1}^* = \tau \left(\rho u_{x_1} \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1} + \rho u_{x_2} \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_2} + \rho u_{x_3} \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_1} \right); \omega_{x_2}^* = \tau \left(\rho u_{x_1} \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_1} + \rho u_{x_2} \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_2} + \rho u_{x_3} \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_2} \right);$$

$$\omega_{x_3}^* = \tau \left(\rho u_{x_1} \frac{\partial u_{x_3}}{\partial x_1} + \rho u_{x_2} \frac{\partial u_{x_3}}{\partial x_2} + \rho u_{x_3} \frac{\partial u_{x_3}}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_3} \right); R^* = \tau \left(u_{x_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + u_{x_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} + u_{x_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} \right);$$

а дивергенція вектору швидкості ($\operatorname{div} \mathbf{u}$) складає: $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{x_3}}{\partial x_3}$.

Компоненти вектору теплового потоку \mathbf{q} визначаються за допомогою виразів:

$$q_{x_1} = q_{x_1}^{NS} - u_{x_1} R^q; q_{x_2} = q_{x_2}^{NS} - u_{x_2} R^q; q_{x_3} = q_{x_3}^{NS} - u_{x_3} R^q;$$

де $R^q = \tau \rho \left(\frac{u_{x_1}}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{u_{x_2}}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{u_{x_3}}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \rho u_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \rho u_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \rho u_{x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right)$, а нав'є-стоксові доданки $q_{x_1}^{NS}, q_{x_2}^{NS}$ і $q_{x_3}^{NS}$ обчислюються як: $q_{x_1}^{NS} = -k \frac{\partial T}{\partial x_1}, q_{x_2}^{NS} = -k \frac{\partial T}{\partial x_2}, q_{x_3}^{NS} = -k \frac{\partial T}{\partial x_3}$.

Залежність динамічного коефіцієнта в'язкості η від температури обирається в наступному вигляді:

$$\eta = \eta_\infty \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^\omega;$$

де $\eta_\infty = \eta(T_\infty)$ – відоме значення η при температурі T_∞ .

Коефіцієнт теплопровідності k й релаксаційний параметр τ пов'язані з коефіцієнтом динамічної в'язкості η співвідношеннями:

$$k = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1) Pr} \eta; \tau = \frac{1}{p Sc} \eta;$$

де Pr – число Прандтля; Sc – число Шмідта.

Для чисельного розв'язку рівнянь (4) – (8) зручно представити їх у безрозмірному вигляді, що дозволить, по-перше, оперувати при розрахунках з величинами порядку одиниці, по-друге, дозволяє виділити чисельні коефіцієнти, від яких залежить розв'язок задачі – виділити так звані параметри подібності.

Виберемо в якості основних розмірних параметрів характерний лінійний розмір R_c (радіус циліндричної трубки), густину набігаючого потоку ρ_∞ і швидкість звуку в набігаючому незбуреному потоці c_∞ .

Запишемо співвідношення між розмірними і безрозмірними величинами, в яких знак «тильда» над змінної ставиться до безрозмірним величинам:

$$\rho = \tilde{\rho}\rho_\infty; u = \tilde{u}c_\infty; c = \tilde{c}c_\infty; p = \tilde{p}\rho_\infty c_\infty^2; x = \tilde{x}R_c; \\ t = \tilde{t}\frac{R_c}{c_\infty}; T = \frac{p}{\rho R} = \frac{\tilde{p}\rho_\infty c_\infty^2}{\tilde{\rho}\rho_\infty R} = \frac{\tilde{p}\gamma}{\tilde{\rho}}\frac{1}{\gamma R} = \tilde{T}\frac{c_\infty^2}{\gamma R}. \quad (9)$$

Визначимо числа Маха і Рейнольдса за формулами:

$$Ma_\infty = \frac{u_\infty}{c_\infty}; Re_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty R_c}{\mu_\infty}. \quad (10)$$

Рівняння повної енергії набуде вигляду:

$$E = \frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} \Rightarrow \tilde{E} = \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}^2}{2} + \frac{\tilde{p}}{\gamma-1}. \quad (11)$$

При переході до безрозмірних величин швидкість звуку перетвориться як:

$$c = \sqrt{\gamma RT} \Rightarrow \tilde{c} = \sqrt{\tilde{T}}; \quad (12)$$

а рівняння стану

$$p = \rho RT; \tilde{p}\rho_\infty c_\infty^2 = \tilde{\rho}\rho_\infty \tilde{T}\frac{c_\infty^2}{\gamma R} \Rightarrow \tilde{p} = \frac{\tilde{\rho}\tilde{T}}{\gamma}. \quad (13)$$

Таким чином, (12) і (13) після переходу до безрозмірних величин змінили свій вигляд. Підставляючи співвідношення (9) у рівняння стану системи (4)–(8), можна переконатися, що приведення до безрозмірного вигляду не змінює виду вихідних рівнянь, при цьому безрозмірні коефіцієнти в'язкості, теплопровідності й релаксаційний параметр обчислюються як:

$$\tilde{\mu} = \frac{Ma}{Re}\tilde{T}^\omega; \quad (14)$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{(\gamma-1)Pr}\frac{Ma}{Re}\tilde{T}^\omega; \quad (15)$$

$$\tilde{\tau} = \frac{Ma}{ReSc}\frac{\tilde{T}^\omega}{\tilde{p}}. \quad (16)$$

Для апроксимації рівнянь (4)–(8) скористаємося методом маркерів і комірок [5]. Даний метод включають специфічну різницеву сітку і специфічну структуру комірки. Цей метод застосовується для рівнянь у найпростіших фізичних змінних, тому може бути застосований для розв'язку отриманих рівнянь. Тривимірною прямокутною різницевою сіткою з позиціонуванням сіткових функцій, яка використовується для апроксимації неперервних функцій потоку маси, тиску і компонентів швидкостей, зображена на рис. 2.

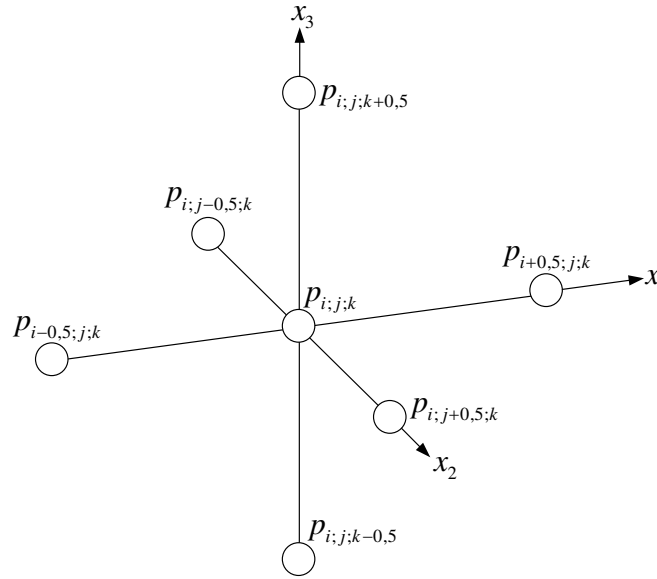


Рис. 2. Схема лінійної моделі

Сітковий аналог функції тиску позиціонується у вузлах тривимірної прямокутної сітки w_h . Сітковий аналог проекцій газодинамічних величин на вісь x_1 розташовуються на ребрі, яке паралельне осі x_1 , на вісь x_2 – паралельне осі x_2 , на вісь x_3 – паралельне осі x_3 .

Усі газодинамічні величини (густина ρ , компоненти швидкості u_{x_1} , u_{x_2} , u_{x_3} , тиск p) будемо відносити до вузлів сітки,

$$\begin{aligned} & (x_{1_{i\pm 0,5}}, x_{2_i}, x_{3_i}); (x_{1_i}, x_{2_{i\pm 0,5}}, x_{3_i}); (x_{1_i}, x_{2_i}, x_{3_{i\pm 0,5}}); (x_{1_i}, x_{2_{i\pm 0,5}}, x_{3_{i\pm 0,5}}); (x_{1_{i\pm 0,5}}, x_{2_i}, x_{3_{i\pm 0,5}}); \\ & (x_{1_{i\pm 0,5}}, x_{2_{i\pm 0,5}}, x_{3_i}); (x_{1_{i\pm 0,5}}, x_{2_{i\pm 0,5}}, x_{3_{i\pm 0,5}}); \end{aligned} \quad (17)$$

а значення довільної функції ψ з множини $\{\rho, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, p\}$ будемо обчислювати як середнє арифметичне їх значень у прилеглих вузлах:

$$\psi_{i\pm 0,5,j,k} = 0,5(\psi_{i\pm 1,j,k} + \psi_{i,j,k}); \psi_{i,j\pm 0,5,k} = 0,5(\psi_{i,j\pm 1,k} + \psi_{i,j,k}); \psi_{i,j,k\pm 0,5} = 0,5(\psi_{i,j,k\pm 1} + \psi_{i,j,k});$$

$$\begin{aligned} \psi_{i\pm 0,5,j\pm 0,5,k} &= 0,5(\psi_{i\pm 1,j\pm 1,k} + \psi_{i,j,k}); \psi_{i\pm 0,5,j,k\pm 0,5} = 0,5(\psi_{i\pm 1,j,k\pm 1} + \psi_{i,j,k}); \psi_{i,j\pm 0,5,k\pm 0,5} = \\ &= 0,5(\psi_{i,j\pm 1,k\pm 1} + \psi_{i,j,k}); \end{aligned}$$

$$\psi_{i\pm 0,5,j\pm 0,5,k\pm 0,5} = 0,125(\psi_{i\pm 1,j\pm 1,k\pm 1} + \psi_{i\pm 1,j,k} + \psi_{i,j\pm 1,k} + \psi_{i,j,k\pm 1} + \psi_{i\pm 1,j\pm 1,k} + \psi_{i\pm 1,j,k\pm 1} + \psi_{i,j\pm 1,k\pm 1}).$$

Для інших функцій $f = f(\rho, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, p)$ покладемо:

$$f_{i,j,k} = f(\rho_{i,j,k}, (u_{x_1})_{i,j,k}, (u_{x_2})_{i,j,k}, (u_{x_3})_{i,j,k}, p_{i,j,k}). \quad (18)$$

Таким чином, кінцево-різницеві аналоги диференційних операторів визначаються за наступними виразами, виходячи з введеної сітки:

$$\frac{du}{dx_1} \Big|_{i,j,k}^n = \frac{u_{i+0,5;j,k} - u_{i-0,5;j,k}}{h_{x_1}}; \frac{du}{dx_2} \Big|_{i,j,k}^n = \frac{u_{i,j+0,5;k} - u_{i,j-0,5;k}}{h_{x_2}}; \frac{du}{dx_3} \Big|_{i,j,k}^n = \frac{u_{i,j,k+0,5} - u_{i,j,k-0,5}}{h_{x_3}};$$

де h_{x_1} , h_{x_2} і h_{x_3} – кроки по простору.

Апроксимуємо диференційне рівняння (4) різницеvim:

$$\frac{\hat{\rho}_{i,j,k} - \rho_{i,j,k}}{\Delta t} + \frac{1}{h_{x_1}} \left((j_{mx_1})_{i+0,5;j,k} - (j_{mx_1})_{i-0,5;j,k} \right) + \frac{1}{h_{x_2}} \left((j_{mx_2})_{i,j+0,5;k} - (j_{mx_2})_{i,j-0,5;k} \right) +$$

$$+ \frac{1}{h_{x_3}} \left((j_{mx_3})_{i,j;k+0,5} - (j_{mx_3})_{i,j;k-0,5} \right) = 0; \quad (19)$$

де Δt – крок у часі. Величина, відмічена $\hat{\rho}_{i,j,k}$, обчислюється на наступному часовому шарі.

Інші рівняння системи (4)–(8) апроксимуються аналогічно:

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{\rho}_{\hat{u}_{x_1}})_{i,j,k} - (\rho_{u_{x_1}})_{i,j,k}}{\Delta t} &= \frac{1}{h_{x_1}} \left((j_{mx_1})_{i+0,5;j;k} (u_{x_1})_{i+0,5;j;k} - (j_{mx_1})_{i-0,5;j;k} (u_{x_1})_{i-0,5;j;k} \right) + \\ &+ \frac{1}{h_{x_2}} \left((j_{mx_2})_{i,j+0,5;k} (u_{x_1})_{i,j+0,5;k} - (j_{mx_2})_{i,j-0,5;k} (u_{x_1})_{i,j-0,5;k} \right) + \frac{1}{h_{x_3}} \left((j_{mx_3})_{i,j;k+0,5} (u_{x_1})_{i,j;k+0,5} - \right. \\ &- \left. (j_{mx_3})_{i,j;k-0,5} (u_{x_1})_{i,j;k-0,5} \right) + \frac{1}{h_{x_1}} (p_{i+0,5;j;k} - p_{i-0,5;j;k}) = \frac{1}{h_{x_1}} \left((\Pi_{x_1 x_1})_{i+0,5;j;k} - (\Pi_{x_1 x_1})_{i-0,5;j;k} \right) + \\ &+ \frac{1}{h_{x_2}} \left((\Pi_{x_2 x_1})_{i,j+0,5;k} - (\Pi_{x_2 x_1})_{i,j-0,5;k} \right) + \frac{1}{h_{x_3}} \left((\Pi_{x_3 x_1})_{i,j;k+0,5} - (\Pi_{x_3 x_1})_{i,j;k-0,5} \right); \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{\rho}_{\hat{u}_{x_2}})_{i,j,k} - (\rho_{u_{x_2}})_{i,j,k}}{\Delta t} &= \frac{1}{h_{x_1}} \left((j_{mx_1})_{i+0,5;j;k} (u_{x_2})_{i+0,5;j;k} - (j_{mx_1})_{i-0,5;j;k} (u_{x_2})_{i-0,5;j;k} \right) + \\ &+ \frac{1}{h_{x_2}} \left((j_{mx_2})_{i,j+0,5;k} (u_{x_2})_{i,j+0,5;k} - (j_{mx_2})_{i,j-0,5;k} (u_{x_2})_{i,j-0,5;k} \right) + \frac{1}{h_{x_3}} \left((j_{mx_3})_{i,j;k+0,5} (u_{x_2})_{i,j;k+0,5} - \right. \\ &- \left. (j_{mx_3})_{i,j;k-0,5} (u_{x_2})_{i,j;k-0,5} \right) + \frac{1}{h_{x_2}} (p_{i,j+0,5;k} - p_{i,j-0,5;k}) = \frac{1}{h_{x_1}} \times \\ &\times \left((\Pi_{x_1 x_2})_{i+0,5;j;k} - (\Pi_{x_1 x_2})_{i-0,5;j;k} \right) + \frac{1}{h_{x_2}} \left((\Pi_{x_2 x_2})_{i,j+0,5;k} - (\Pi_{x_2 x_2})_{i,j-0,5;k} \right) + \frac{1}{h_{x_3}} \times \\ &\times \left((\Pi_{x_3 x_2})_{i,j;k+0,5} - (\Pi_{x_3 x_2})_{i,j;k-0,5} \right); \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{\rho}_{\hat{u}_{x_3}})_{i,j,k} - (\rho_{u_{x_3}})_{i,j,k}}{\Delta t} &= \frac{1}{h_{x_1}} \left((j_{mx_1})_{i+0,5;j;k} (u_{x_3})_{i+0,5;j;k} - (j_{mx_1})_{i-0,5;j;k} (u_{x_3})_{i-0,5;j;k} \right) + \frac{1}{h_{x_2}} \times \\ &\times \left((j_{mx_2})_{i,j+0,5;k} (u_{x_3})_{i,j+0,5;k} - (j_{mx_2})_{i,j-0,5;k} (u_{x_3})_{i,j-0,5;k} \right) + \frac{1}{h_{x_3}} \times \\ &\times \left((j_{mx_3})_{i,j;k+0,5} (u_{x_3})_{i,j;k+0,5} - (j_{mx_3})_{i,j;k-0,5} (u_{x_3})_{i,j;k-0,5} \right) + \frac{1}{h_{x_3}} \times \\ &\times (p_{i,j;k+0,5} - p_{i,j;k-0,5}) = \frac{1}{h_{x_1}} \left((\Pi_{x_1 x_3})_{i+0,5;j;k} - (\Pi_{x_1 x_3})_{i-0,5;j;k} \right) + \frac{1}{h_{x_2}} \left((\Pi_{x_2 x_3})_{i,j+0,5;k} - (\Pi_{x_2 x_3})_{i,j-0,5;k} \right) + \\ &+ \frac{1}{h_{x_3}} \times \left((\Pi_{x_3 x_3})_{i,j;k+0,5} - (\Pi_{x_3 x_3})_{i,j;k-0,5} \right); \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{E}_{i,j,k} - E_{i,j,k}}{\Delta t} &= \frac{1}{h_{x_1}} \left((j_{mx_1})_{i+0,5;j;k} H_{i+0,5;j;k} - (j_{mx_1})_{i-0,5;j;k} H_{i-0,5;j;k} \right) + \frac{1}{h_{x_2}} \left((j_{mx_2})_{i,j+0,5;k} H_{i,j+0,5;k} - \right. \\ &- \left. (j_{mx_2})_{i,j-0,5;k} H_{i,j-0,5;k} \right) + \frac{1}{h_{x_3}} \left((j_{mx_3})_{i,j;k+0,5} H_{i,j;k+0,5} - (j_{mx_3})_{i,j;k-0,5} H_{i,j;k-0,5} \right) + \frac{1}{h_{x_1}} \times \\ &\times (q_{i+0,5;j;k} - q_{i-0,5;j;k}) + \frac{1}{h_{x_2}} (q_{i,j+0,5;k} - q_{i,j-0,5;k}) + \frac{1}{h_{x_3}} (q_{i,j;k+0,5} - q_{i,j;k-0,5}) = \\ &= \frac{1}{h_{x_1}} \left[\left((\Pi_{x_1 x_1})_{i+0,5;j;k} (u_{x_1})_{i+0,5;j;k} - (\Pi_{x_1 x_1})_{i-0,5;j;k} (u_{x_1})_{i-0,5;j;k} \right) + \left((\Pi_{x_1 x_2})_{i+0,5;j;k} (u_{x_2})_{i+0,5;j;k} - \right. \right. \\ &- \left. \left. (\Pi_{x_1 x_2})_{i-0,5;j;k} (u_{x_2})_{i-0,5;j;k} \right) + \left((\Pi_{x_1 x_3})_{i+0,5;j;k} (u_{x_3})_{i+0,5;j;k} - (\Pi_{x_1 x_3})_{i-0,5;j;k} (u_{x_3})_{i-0,5;j;k} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{h_{x_2}} \left[\left((\Pi_{x_2 x_1})_{i,j+0,5;k} (u_{x_1})_{i,j+0,5;k} - (\Pi_{x_2 x_1})_{i,j-0,5;k} (u_{x_1})_{i,j-0,5;k} \right) + \right. \\ &+ \left. \left((\Pi_{x_2 x_2})_{i,j+0,5;k} (u_{x_2})_{i,j+0,5;k} - (\Pi_{x_2 x_2})_{i,j-0,5;k} (u_{x_2})_{i,j-0,5;k} \right) + \right. \\ &\times \left. \left((\Pi_{x_2 x_3})_{i,j+0,5;k} (u_{x_3})_{i,j+0,5;k} - (\Pi_{x_2 x_3})_{i,j-0,5;k} (u_{x_3})_{i,j-0,5;k} \right) \right] + \frac{1}{h_{x_3}} \left[\left((\Pi_{x_3 x_1})_{i,j;k+0,5} (u_{x_1})_{i,j;k+0,5} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(\Pi_{x_3x_1})_{i,j;k-0,5}(u_{x_1})_{i,j;k-0,5} + \left((\Pi_{x_3x_2})_{i,j;k+0,5}(u_{x_2})_{i,j;k+0,5} - (\Pi_{x_3x_2})_{i,j;k-0,5}(u_{x_2})_{i,j;k-0,5} \right) + \\
 & + \left((\Pi_{x_3x_3})_{i,j;k+0,5}(u_{x_3})_{i,j;k+0,5} - (\Pi_{x_3x_3})_{i,j;k-0,5}(u_{x_3})_{i,j;k-0,5} \right). \tag{23}
 \end{aligned}$$

Апроксимуємо рівняння, що описують компоненти векторів j_m , теплового потоку q й компоненти тензора в'язких напружень Π , різницевиими у напівцілих точках, тобто:

$$\begin{aligned}
 (j_{mx_1})_{i\pm 0,5;j;k} &= \rho_{i\pm 0,5;j;k} \left((u_{x_1})_{i\pm 0,5;j;k} - (\omega_{x_1})_{i\pm 0,5;j;k} \right); (j_{mx_2})_{i,j\pm 0,5;k} = \rho_{i,j\pm 0,5;k} \left((u_{x_2})_{i,j\pm 0,5;k} - \right. \\
 & \left. - (\omega_{x_2})_{i,j\pm 0,5;k} \right); \\
 (j_{mx_3})_{i,j;k\pm 0,5} &= \rho_{i,j;k\pm 0,5} \left((u_{x_3})_{i,j;k\pm 0,5} - (\omega_{x_3})_{i,j;k\pm 0,5} \right); \\
 (\Pi_{x_1x_3})_{i\pm 0,5;j;k} &= (\Pi_{x_1x_3}^{NS})_{i\pm 0,5;j;k} + (u_{x_1})_{i\pm 0,5;j;k} (\omega_{x_3}^*)_{i\pm 0,5;j;k}; \\
 (\Pi_{x_2x_1})_{i,j\pm 0,5;k} &= (\Pi_{x_2x_1}^{NS})_{i,j\pm 0,5;k} + (u_{x_2})_{i,j\pm 0,5;k} (\omega_{x_1}^*)_{i,j\pm 0,5;k}; \\
 (\Pi_{x_2x_2})_{i,j\pm 0,5;k} &= (\Pi_{x_2x_2}^{NS})_{i,j\pm 0,5;k} + (u_{x_2})_{i,j\pm 0,5;k} (\omega_{x_2}^*)_{i,j\pm 0,5;k} + (R^*)_{i,j\pm 0,5;k}; \\
 (\Pi_{x_2x_3})_{i,j\pm 0,5;k} &= (\Pi_{x_2x_3}^{NS})_{i,j\pm 0,5;k} + (u_{x_2})_{i,j\pm 0,5;k} (\omega_{x_3}^*)_{i,j\pm 0,5;k}; (\Pi_{x_3x_1})_{i,j;k\pm 0,5} = (\Pi_{x_3x_1}^{NS})_{i,j;k\pm 0,5} + \\
 & + (u_{x_3})_{i,j;k\pm 0,5} (\omega_{x_1}^*)_{i,j;k\pm 0,5}; \\
 (\Pi_{x_3x_2})_{i,j;k\pm 0,5} &= (\Pi_{x_3x_2}^{NS})_{i,j;k\pm 0,5} + (u_{x_3})_{i,j;k\pm 0,5} (\omega_{x_2}^*)_{i,j;k\pm 0,5}; \\
 (\Pi_{x_3x_3})_{i,j;k\pm 0,5} &= (\Pi_{x_3x_3}^{NS})_{i,j;k\pm 0,5} + (u_{x_3})_{i,j;k\pm 0,5} (\omega_{x_3}^*)_{i,j;k\pm 0,5} + (R^*)_{i,j;k\pm 0,5}; \\
 \text{div} \mathbf{u} &= \frac{1}{h_{x_1}} \left((u_{x_1})_{i+0,5;j;k} - (u_{x_1})_{i-0,5;j;k} \right) + \frac{1}{h_{x_2}} \left((u_{x_2})_{i,j+0,5;k} - (u_{x_2})_{i,j-0,5;k} \right) \\
 & + \frac{1}{h_{x_3}} \left((u_{x_3})_{i,j;k+0,5} - (u_{x_3})_{i,j;k-0,5} \right); \\
 (q_{x_1})_{i\pm 0,5;j;k} &= (q_{x_1}^{NS})_{i\pm 0,5;j;k} - (u_{x_1})_{i\pm 0,5;j;k} (R^q)_{i\pm 0,5;j;k}; \\
 (q_{x_2})_{i,j\pm 0,5;k} &= (q_{x_2}^{NS})_{i,j\pm 0,5;k} - (u_{x_2})_{i,j\pm 0,5;k} (R^q)_{i,j\pm 0,5;k}; \\
 (q_{x_3})_{i,j;k\pm 0,5} &= (q_{x_3}^{NS})_{i,j;k\pm 0,5} - (u_{x_3})_{i,j;k\pm 0,5} (R^q)_{i,j;k\pm 0,5}; (q_{x_1}^{NS})_{i\pm 0,5;j;k} = -k_{i\pm 0,5;j;k} \frac{1}{h_{x_1}} (T_{i+0,5;j;k} - \\
 & - T_{i-0,5;j;k}); \\
 (q_{x_2}^{NS})_{i,j\pm 0,5;k} &= -k_{i,j\pm 0,5;k} \frac{1}{h_{x_2}} (T_{i,j+0,5;k} - T_{i,j-0,5;k}); (q_{x_3}^{NS})_{i,j;k\pm 0,5} = -k_{i,j;k\pm 0,5} \frac{1}{h_{x_3}} (T_{i,j;k+0,5} - T_{i,j;k-0,5}).
 \end{aligned}$$

За допомогою виразів (19)–(23) можна знаходити значення простих фізичних змінних у вузлах використовуваної сіткової області. Отримані дані можна використовувати при моделюванні циркуляції газодинамічного потоку у системі авіаційного двигуна ТВ3-117.

До отриманих різницевих рівнянь необхідно додати наступні початкові і граничні умови, що відображають основні чотири процесу реального циклу Брайтона (табл. 1).

Таблиця 1

Початкові і граничні умови

Ізоентропічне стиснення (процес 1-2)	Ізобаричне підведення теплоти (процес 2-3)	Ізоентропічне розширення (процес 3-4)	Ізобаричне відведення теплоти (процес 4-1)
$q = 0; k = 0;$ $\Delta T = 0; dT = 0$	$p = \text{const}; dp = 0$	$q = 0; k = 0;$ $\Delta T = 0; dT = 0$	$p = \text{const}; dp = 0$

Для однакового обчислення газодинамічних величин у всіх внутрішніх точках розрахункової області, включаючи прикордонні точки, вводиться система фіктивних комірок, що примикають до кожної з меж. Значення густини, компонент швидкості і тиску у фіктивних комірках задаються таким чином, щоб апроксимувати потрібне значення відповідної величини, або її похідної, на кордоні, яка знаходиться у напівцілій точці.

Нехай на межі, розташованій в точці $i = \frac{1}{2}$, задано значення температури T_w . Точка $i = 0$ є фіктивною, а точка $i = 1$ є найближчою прилеглою до кордону внутрішньою точкою. Тоді значення T_0

вибирається з умови: $T_w = \frac{T_0 + T_1}{2}$. Якщо на кордоні задана умова на похідну виду $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$, то величина f_0 у фіктивній точці вибирається у вигляді $f_0 = f_1$.

Таким чином, алгоритм знаходження густини, компонент швидкості і тиску на наступному часовому шарі складається з двох етапів, на першому з яких заповнюються фіктивні комірки, а на другому – обчислюються значення $\hat{\rho}_{i,j,k}$, $(\hat{u}_{x_1})_{i,j,k}$, $(\hat{u}_{x_2})_{i,j,k}$, $(\hat{u}_{x_3})_{i,j,k}$ й $\hat{E}_{i,j,k}$ на наступному часовому шарі.

Стационарний розв’язок знаходиться методом установлення і вважається досягнутим при виконанні одного і наступних критеріїв:

$$\frac{1}{N_{x_1} N_{x_2} N_{x_3}} \sum_{(x_{1i}, x_{2j}, x_{3k}) \in w_h} \left| \frac{\hat{\rho}_{i,j,k} - \rho_{i,j,k}}{\rho_{i,j,k} \Delta t} \right| \leq \varepsilon; \tag{24}$$

в якому нев’язка ε може варіюватися у залежності з розрахунком, а N_{x_1} , N_{x_2} , N_{x_3} – число вузлів сітки по x_1 , x_2 і x_3 , або

$$\max_{(x_{1i}, x_{2j}, x_{3k}) \in w_h} \left| \frac{\hat{\rho}_{i,j,k} - \rho_{i,j,k}}{\rho_{i,j,k} \Delta t} \right| \leq \varepsilon. \tag{25}$$

де w_h – вузли сітки.

Для знаходження розв’язку системи алгебраїчних рівнянь (19)–(23) у роботі застосовано багатосітковий метод із зовнішніми ітераціями за нелінійністю. Припущено, що для визначеності на межах задані умови Дирихле (граничні умови звичайного диференційного рівняння або диференційного рівняння у частинних похідних, в яких на кордоні визначається значення невідомої функції), тобто значення при $j = 1, j = J, k = 1, k + K$ відомі. Тоді

$$\begin{cases} u_{1,k}^{n+1} = \varphi_1(x_3^{n+1}, (x_2)_k), k = 1, \dots, K; \\ u_{J,k}^{n+1} = \varphi_2(x_3^{n+1}, (x_2)_k), k = 1, \dots, K; \\ u_{j,1}^{n+1} = \psi_1(x_3^{n+1}, (x_1)_j), j = 1, \dots, J; \\ u_{j,K}^{n+1} = \psi_2(x_3^{n+1}, (x_1)_j), j = 1, \dots, J. \end{cases} \tag{26}$$

Система (19)–(23) має шаблон, наведений на рис. 2, з якого видно, що на шарі $n + 1$ зав’язані значення у 5 вузлах сітки. Тоді поставлена задача зводиться до знаходження рішення u_{n+1} в системі (19)–(23) з граничними умовами (26).

Видно, що сукупність усіх рівнянь (19)–(23) і (26) являє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Щоб конкретизувати вид системи, необхідно ввести який-небудь спосіб нумерації (лінійного упорядкування) всіх невідомих на шарі $n + 1$. У роботі пропонується нумерація невідомих згідно рис. 3, яка відповідає заміні $v_{j+J(k-1)} = u_{j,k}^{n+1}$.

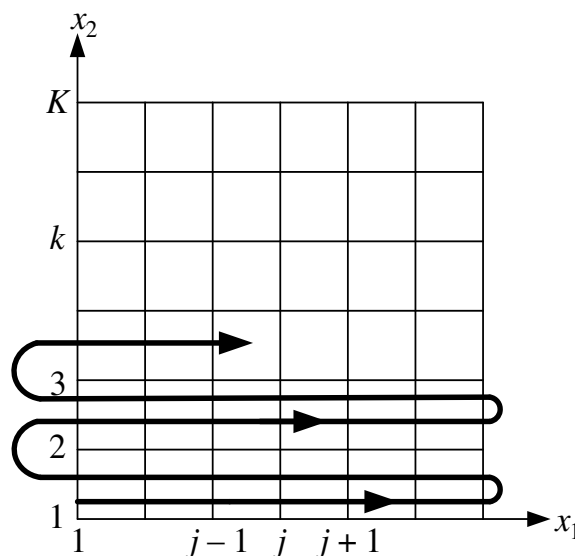


Рис. 3. Порядок нумерації всіх невідомих значень на шарі $n + 1$

Для сіткового аналога кожне рівняння системи (19)–(23) має узагальнений вигляд:

$$a_m v_{m-j} + b_m v_{m-1} + c_m v_m + d_m v_{m+1} + e_m v_{m+j} + \dots = f_m; \quad (27)$$

де a_m, b_m, c_m, d_m, e_m – коефіцієнти перед невідомими.

Таким чином, система лінійних алгебраїчних рівнянь матиме вигляд:

$$Av = f; \quad (28)$$

де $v = (v_1, \dots, v_M)^T$; $M = JK$, матриця A є 5-діагональною матрицею, структура якої наведена на рис. 4.

Особливістю системи (28) є необхідність одночасного використання п'яти матричних рівнянь у всіх видах ітерацій (ітерацій Якобі для лінеаризованих систем й ітерацій за нелінійністю).

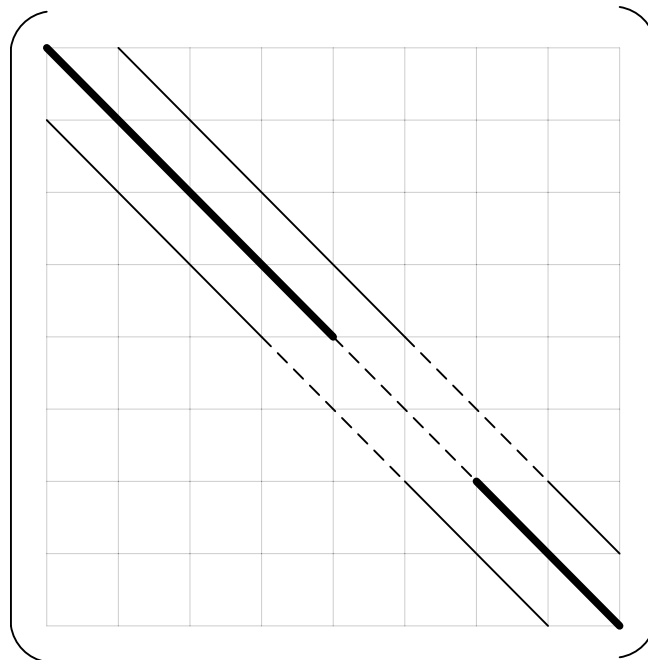


Рис. 4. Структура матриці A у просторі

Таким чином, отримана варіаційно-різницева схема першого порядку апроксимації за часом і простором. Для розв'язку систем алгебраїчних рівнянь на кожному часовому шарі застосовується точковий метод Якобі [12]. Збіжність цього методу й ітерацій за нелінійністю значно прискорюється при використанні в якості початкового наближення квадратичної екстраполяції значень за часом з двох часових шарів замість просто перенесення значень з попереднього шару. Зважаючи на істотне діагонального переважання середня кількість ітерацій, необхідна для збіжності методу Якобі на сітці 1001×101 вузлів, складає не більше 10.

Алгоритм реалізації різницевої апроксимації системи рівнянь Нав'є-Стокса представлено на рис. 5, у якому використані наступні методи, які дозволили збільшити швидкість розрахунків:

1. При розрахунках у пам'яті зберігається інформація тільки про n -й і $(n + 1)$ -й часові шари. При переході на наступний крок у часі, дані комірок з $(n + 1)$ -го шару переписуються в n -й шар й ітерація повторюється. Даний спосіб дозволяє значно скоротити об'єм займаної оперативної пам'яті, тобто в пам'яті зберігається тільки $2nX$ комірок, що дозволяє істотно збільшити швидкість розрахунків.

2. Результати, отримані при одній ітерації, в той же момент відображаються на графіках, які будуються у динаміці, що робить даний алгоритм максимально динамічним й зручним при використанні, наочно і зрозуміло користувачеві.

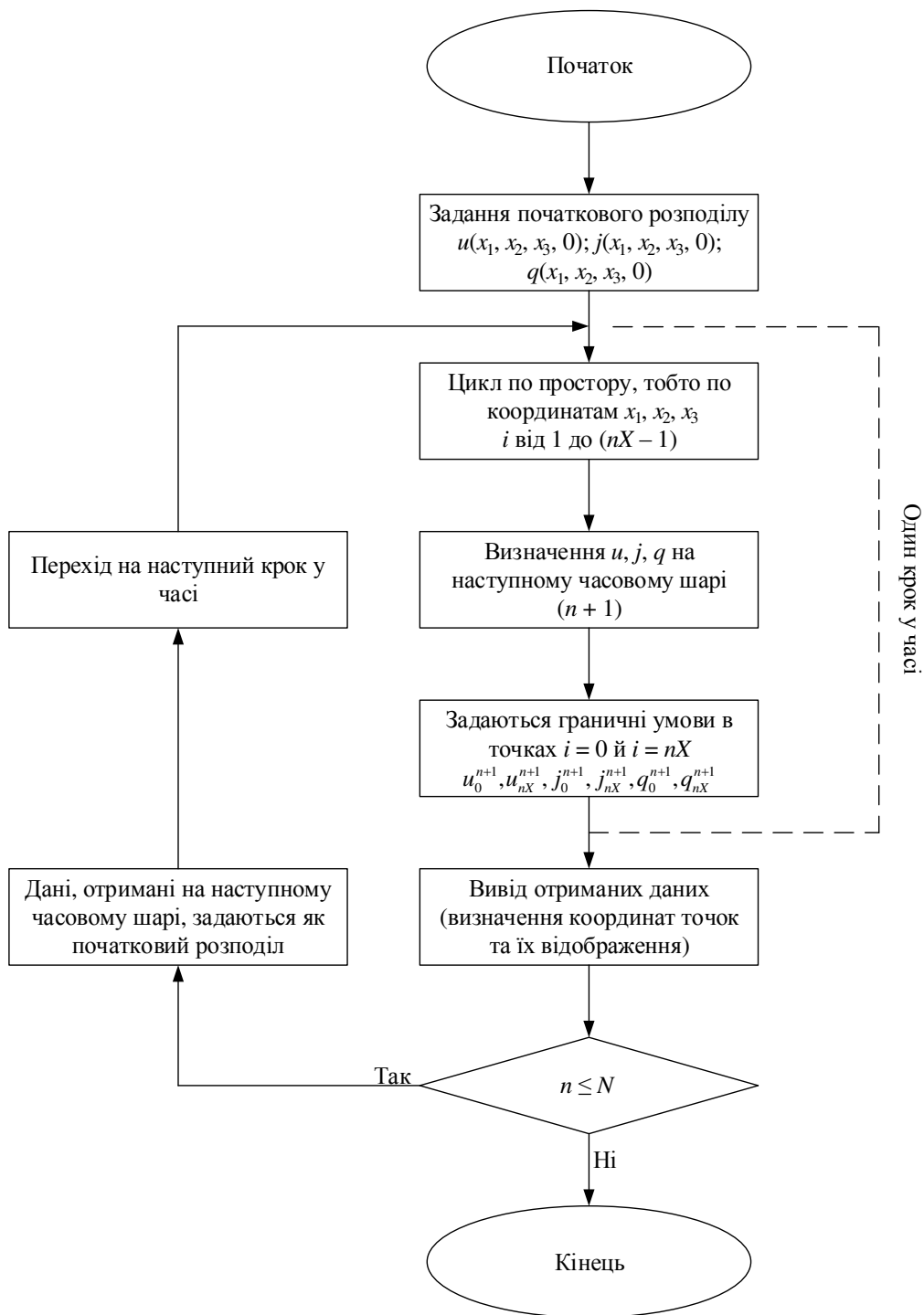


Рис. 5. Алгоритм реалізації різницевої апроксимації рівнянь Нав'є-Стокса

У табл. 2 показано робочі програми, побудовані за послідовним алгоритмом з «червоно-чорним» упорядкуванням [13], використовуючи, в залежності від розміщення, окремі сітки. Розрахунки проводилися на одному обчислювальному вузлі кластеру із використанням компілятора C++.

Таблиця 2

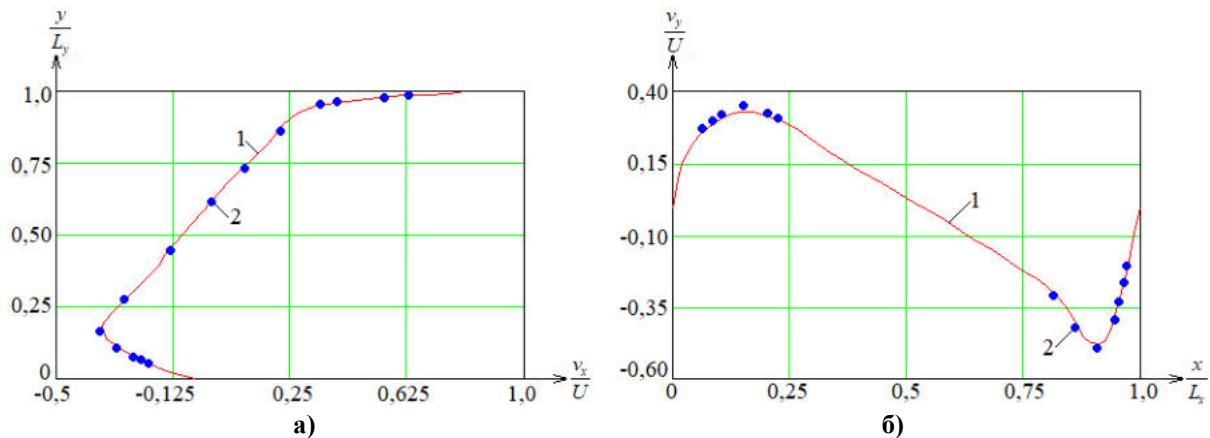
Час роботи послідовної програми при використанні різних сіток (точність $\epsilon = 0,001$)

Сітка	Кількість ітерацій	Час обчислень, с
128 × 128	1004	21
256 × 256	3176	294
512 × 512	12160	5037
1024 × 1024	53713	107655

З табл. 2 видно, що при зменшенні кожного кроку рівномірної сітки в 2 рази число ітерацій збільшується нелінійно, зростає обсяг обчислень і час роботи програми при кожній зміні розмірів сітки збільшується більш ніж на порядок. Тим самим стає актуальним скорочення часу роботи програми за рахунок використання ЕОМ з паралельною архітектурою.

Для перевірки правильності роботи побудованого алгоритму і програми були проведені порівняння розрахункових даних з результатами, представленими в [14]. На рис. 6, а для квадратної каверни показаний профіль поздовжньої швидкості v_x в середньому поперечному перерізі компресора авіаційного двигуна ТВ3-117 $x = L_x$, отриманий в результаті обчислень, на рис. 6, б побудований графік поперечної швидкості v_y в середньому поздовжньому перерізі компресора авіаційного двигуна ТВ3-117.

Видно, що навіть при використанні для конвективних членів протипотікової апроксимації першого порядку на докладній сітці має місце «досить гарне» узгодження з розрахунками, отриманими на основі використання різницевої схеми більш високого порядку на відносно більш грубій сітці [14].



**Рис. 6. Графік поздовжньої швидкості (при $x = L_x / 2$) та поперечної (при $y = L_y / 2$):
1 – отриманий на сітці 256×256 ; 2 – розрахунки [14]**

Побудова паралельної версії алгоритму SIMPLE здійснювалося на основі принципу геометричної декомпозиції [15] гратчастої області, коли вся область дослідження ділиться на рівні по площі частини (або за кількістю сіткових вузлів), обчислення в яких слід проводити одночасно і незалежно. Основна обчислювальна складність алгоритму SIMPLE – це розв’язок на кожній глобальній ітерації систем сіткових рівнянь для компонент швидкості і поправки тиску. Для вирішення таких систем в даній роботі пропонується використовувати метод релаксації, оскільки інші методи більш швидко сходяться при послідовних обчисленнях (GMRES, BiCGStab, CG тощо). При паралельній реалізації на основі методу геометричної декомпозиції показують збільшення загального обсягу обчислювальної роботи (числа ітерацій для забезпечення збіжності із заданою точністю) при зростанні кількості застосовуваних в обчисленнях процесорів в порівнянні з послідовною версією [13].

У даній роботі використовувався більш ефективна у порівнянні з одновимірної двовимірною декомпозиція гратчастої області, коли вся розрахункова область ділиться на двовимірні блоки однакових розмірів (рис. 7), в кожному з яких значення сіткових функцій обчислюються одночасно і незалежно.

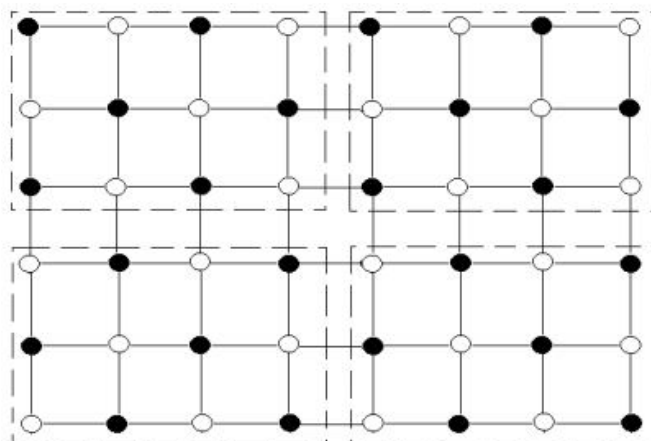
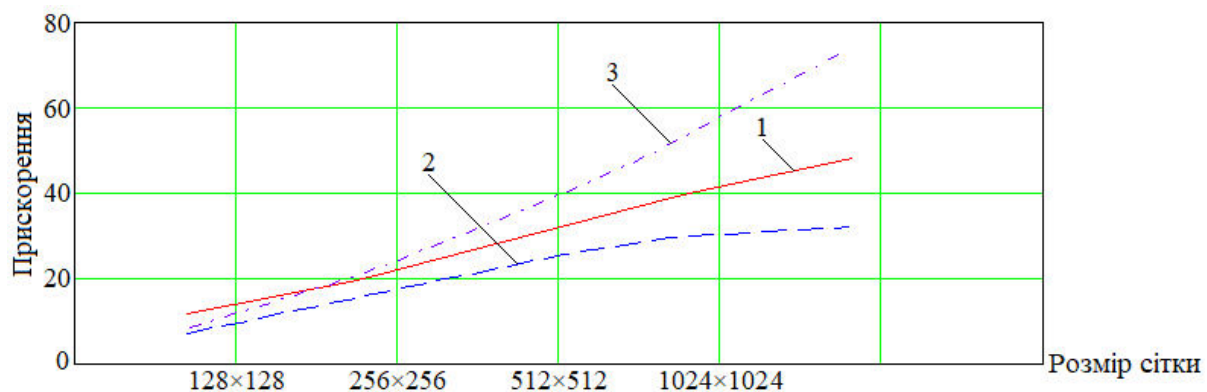


Рис. 7. Геометрична декомпозиція даних

Однак для забезпечення таких ідеально паралельних обчислень необхідно забезпечити кожну підобласть додатковими значеннями сіткових функцій, які належать вузлів з сусідніх по декомпозиції підобластей, але проте ж необхідні для обчислень відповідно до обраного шаблону «хрест». Така декомпозиція називається декомпозицією з перекриттям і її реалізація вимагає обмінів «примежових» значень сіткової функції на кожній ітерації методу релаксації. Для отримання ефективного паралельного алгоритму необхідно, щоб витрати часу на передачу даних між сусідніми підобластями були істотно менші часу обчислень на кожній ітерації.

Розроблений паралельний алгоритм був реалізований на паралельних ЕОМ з різною архітектурою: обчислювальний кластер і сервер з відеокартою NVIDIA GTS250. При створенні паралельної програми для кластера використовувався стандарт Message Passing Interface, а для сервера з графічними процесорами – технологія Compute Unified Device Architecture. Паралельна версія програми для кожного випадку виходить на основі послідовної, при цьому застосування бібліотеки MPI змінює код послідовної програми лише частково, в той час як для технології CUDA потрібно повне перестроювання послідовної програми.

На рис. 8 показано прискорення (відношення часу роботи послідовної програми до часу роботи паралельної) паралельних програм, написаних з використанням CUDA або MPI-інтерфейсу, на різних сітках. MPI-програма була запущена на 32 і 64 обчислювальних ядрах кластера. З рис. 8 видно, що прискорення паралельних програм зростає зі збільшенням розмірів сітки, що пов'язано зі збільшенням обсягу обчислювальної роботи у порівнянні з комунікаційними витратами. Для вирішення даної задачі на сітках з різною щільністю вузлів продуктивність сервера з відеокартою виявилася кращою 32 обчислювальних ядер кластера, але гірше ніж 64, проте з економічної точки зору розрахунки на відеокарті NVIDIA GTS250 краще використання 64 обчислювальних ядер кластера в силу меншого енергоспоживання і вартості.



**Рис. 8. Прискорення паралельних програм на різних сітках:
1 – CUDA 2 – MPI-32 PROC; 3 – MPI-64 PROC**

На сітці 1024x1024 час розрахунку послідовної програми становить близько 30 годин, відповідно до рис. 6, час роботи програми з використанням сервера з відеокартою NVIDIA GTX250 скоротилося до 30 хв, і до 20 хв з використанням 64 обчислювальних ядер обчислювального кластера.

Висновки

1. Розроблений алгоритм дозволяє моделювати ситуації, які могли б статися під час експлуатації авіаційного двигуна ТВ3-117, що надає можливості проаналізувати вже минулі або передбачити розвиток майбутніх подій в тій чи іншій ситуації.

2. Даний алгоритм можливо використовувати для динамічного відображення стану авіаційного двигуна в режимі реального часу, тобто застосувати його для створення програмного комплексу, який здійснює моніторинг динамічних (перехідних) процесів в авіаційному двигуні ТВ3-117. Дана розробка дозволить:

- скоротити кількість аварійних ситуацій;
- збільшити швидкість реагування на будь-яку несправність;
- зменшити експлуатаційне навантаження на двигун.

3. Розроблено версії алгоритму SIMPLE, що орієнтовані на використання високопродуктивної обчислювальної техніки з паралельною архітектурою, а саме багатопроцесорного Linux-кластера з розподіленою пам'яттю або сервера з графічними прискорювачами. В основі розроблених паралельних алгоритмів лежить застосування принципу неодномірності геометричної декомпозиції, «червоно-чорного» упорядкування при обході вузлів сітки і методу релаксації для вирішення сіткових рівнянь. У

результаті отримані паралельні алгоритми чисельного розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса володіють чудовою властивістю прямопропорційного зменшення числа арифметичних операцій, які виконуються одним процесором/ядром, при збільшенні загальної кількості використовуваних обчислювальних процесорів/ядер.

4. При розв'язку задачі руху газодинамічного потоку в компресорі авіаційного двигуна ТВ3-117 отримана властивість паралельних алгоритмів дозволила забезпечити прискорення в обчисленнях на сітках з більш ніж 106 вузлів в кілька десятків разів. Крім того, аналіз результатів обчислень показав високу ефективність побудованого паралельного алгоритму на графічних процесорах, що істотно розширює можливості при чисельному дослідженні інших задач механіки рідини і газу.

5. Отримані результати можуть бути застосовані й для інших видів авіаційних двигунів. Перспективами дослідження є проведення обчислень часу роботи послідовної програми при використанні різних сіток на більш високошвидкісних процесорах та відео картах та його зменшення з метою подальшого використання отриманих результатів в бортовій системі контролю і діагностики технічного стану авіаційного двигуна ТВ3-117.

Список використаної літератури

1. Ntantis E. L., Botsaris P. N. Diagnostic methods for an aircraft engine performance. *Journal of engineering science and technology*. 2015. Review 8 (4). Pp. 64–72.
2. Kiakojoori S., Khorasani K. Dynamic neural networks for gas turbine engine degradation prediction, health monitoring and prognosis. *Neural Computing & Applications*. 2016. Vol. 27. No. 8. Pp. 2151–2192.
3. Pashayev A. M., Askerov D. D., Ardil C., Sadiqov R. A., Abdullayev P. S. Complex condition monitoring system of aircraft gas turbine engine. *International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*. 2007. Vol. 1. No. 11. Pp. 689–695.
4. Shmelov Yu., Vladov S., Derevyanko I., Dieriabina I., Chyzhova L. Identification of rear model of TV3-117 aircraft engine based on the basis of neuro-multi-functional technologies. *Innovative technologies and scientific solutions for industries*. 2019. No. 1 (7). Pp. 43–49.
5. Васильев В. И., Жернаков С. В. Контроль и диагностика технического состояния авиационных двигателей на основе экспертных систем. *Вестник УГАТУ*. 2007. Т. 9. № 4 (22). С. 11–23.
6. Жернаков С. В. Методология системного анализа для решения проблемы информационного мониторинга состояния авиационного двигателя. *Вестник УГАТУ*. 2010. Т. 14. № 3 (38). С. 71–81.
7. Li R, Shi Y. J. The fuel optimal control problem of a hypersonic aircraft with periodic cruising mode. *Mathematical and Computer Modelling*. 2012. Vol. 55, Issues 11–12. Pp. 2141–2150.
8. Котовский В. Н. Техническая термодинамика. М. : Московский государственный технический университет гражданской авиации. 2015. С. 72–83.
9. Алгазин С. Д. Численное исследование уравнений Навье-Стокса. *Прикладная механика и техническая физика*. 2007. Том 48. № 5. С. 43–52.
10. Елизарова Т. Г. Математические модели и численные методы в динамике газа и жидкости. М. : МГУ им. М.В. Ломоносова. 2005. С. 73–87.
11. Kamyshin V. E., Mazhorova O. S. Algorithm for solving the Navier-Stokes equations for the modeling of creeping flows. *Differential Equations*. 2017. Vol. 53, Issue 7. Pp. 949–963.
12. Wang F., Zheng Y. Alternative method of progressive eigenvalue of the unbounded Jacobi matrix. *Applied mechanics and materials*. 2014. Vol. 543–547. Pp. 846–849.
13. Деги Д. В., Старченко А. В. Численное решение уравнений Навье-Стокса на компьютерах с параллельной архитектурой. *Вестник Томского государственного университета*. 2012. № 2 (18). С. 88–98.
14. Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T. High-Resolutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of computational physics*. 1982. Vol. 48. Pp. 387–411.
15. Богословский Н. Н., Есаулов А. О., Старченко А. В. Параллельная реализация алгоритма вычислительной гидродинамики SIMPLE. *Сибирская школа семинар по параллельным вычислениям*. 2002. С. 118–124.

References

1. Ntantis, E. L., Botsaris, P. N. (2015), “Diagnostic methods for an aircraft engine performance”, *Journal of engineering science and technology*. Review 8 (4). P. 64–72.
2. Kiakojoori, S., Khorasani, K. (2016), “Dynamic neural networks for gas turbine engine degradation prediction, health monitoring and prognosis”, *Neural Computing & Applications*. Vol. 27. No. 8. P. 2151–2192.

3. Pashayev, A. M., Askerov, D. D., Ardil, C., Sadiqov, R. A., Abdullayev, P. S. (2007), “Complex condition monitoring system of aircraft gas turbine engine”, *International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*. Vol. 1. No. 11. P. 689–695.
4. Shmelov, Yu., Vladov, S., Derevyanko, I., Dieriabina, I., Chyzhova, L. (2019), “Identification of rear model of TV3-117 aircraft engine based on the basis of neuro-multi-functional technologies”, *Innovative technologies and scientific solutions for industries*. No. 1 (7). P. 43–49.
5. Vasilev, V. I., Zhernakov, S. V., (2007), “Control and diagnostics of aircraft engines technical condition based on expert systems” [“Kontrol i diagnostika tekhnicheskogo sostoyaniya aviacionnykh dvigatelej na osnove ekspertnykh sistem”], *Bulletin of USATU*, Vol. 9, No. 4 (22), P. 11–23..
6. Zhernakov, S. V., (2010), “System analysis methodology for solving the problem of information monitoring of aircraft engines condition” [“Metodologiya sistemnogo analiza dlya resheniya problemy informacionnogo monitoringa sostoyaniya aviacionnogo dvigatelya”], *Bulletin of USATU*, Vol. 14, No. 3 (38), P. 71–81.
7. Li, R, Shi, Y. J. (2012), “The fuel optimal control problem of a hypersonic aircraft with periodic cruising mode”, *Mathematical and Computer Modelling*. Vol. 55, Issues 11–12. P. 2141–2150.
8. Kotovskii, V. N., (2015), *Technical Thermodynamics* [“Tekhnicheskaya termodinamika”], Moscow : Moscow State Technical University of Civil Aviation, P. 72–83.
9. Algazin, S. D., (2007), “Numerical research of the Navier-Stokes equations” [“Chislennoe issledovanie uravnenij Nav`e-Stoksa”], *Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 48, No. 5, P. 71–81.
10. Elizarova, T. G., (2005) *Mathematical models and numerical methods in the dynamics of gas and liquid* [Matematicheskie modeli i chislennye metody v dinamike gaza i zhidkosti]. Moscow : Lomonosov Moscow State University, P. 73–87.
11. Kamyshin, V. E., Mazhorova, O. S. (2017), “Algorithm for solving the Navier-Stokes equations for the modeling of creeping flows”, *Differential Equations*. Vol. 53, Issue 7. P. 949–963.
12. Wang, F., Zheng, Y. (2014), “Alg Alternative method of progressive eigenvalue of the unbounded Jacobi matrix”, *Applied mechanics and materials*. Vol. 543–547. P. 846–849.
13. Degi D. V., Starchenko A. V. (2012), “Numerical solution of Navier-Stokes equations on computers with parallel architecture”, *Tomsk state university journal*. No. 2 (18). P. 88–98.
14. Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T. (1982), “High-Resolutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method”, *Journal of computational physics*. Vol. 48. P. 387–411.
15. Bogoslovskij N. N., Esaulov A. O., Starchenko A. V. (2002), “Parallel implementation of the SIMPLE computational fluid dynamics algorithm”, *Siberian School Seminar on Parallel Computing*. P. 118–124.